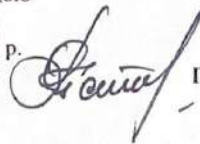


**ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
“УНІВЕРСИТЕТ КОРОЛЯ ДАНИЛА”
ФАКУЛЬТЕТ СУСПІЛЬНИХ ТА ПРИКЛАДНИХ НАУК
КАФЕДРА АРХІТЕКТУРИ ТА БУДІВНИЦТВА**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
щодо виконання курсової роботи
навчальної дисципліни
«Опір матеріалів»**

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за освітньо-професійною програмою «Будівництво та
цивільна інженерія»
спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія

Схвалено Науково-методичною радою
ЗВО «Університет Короля Данила»
Протокол №1 від «25» жовтня 2022 р.
Голова Науково-методичної ради



Петро ОСТАФІЙЧУК

Методичні вказівки до виконання курсової роботи з «Опору матеріалів» для студентів галузі знань 19 «Архітектура та будівництво», спеціальність 192 «Будівництво та цивільна інженерія». 2022 року - 62 с.

Розробники:

Артим В.І. – доктор технічних наук, професор

Шевчук М.О. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри архітектури та будівництва

Рецензенти:

Андрусyak А.В. – к.т.н., доцент кафедри будівництва та енергоефективних споруд

Касіянчук В.Д. – к.т.н., професор кафедри архітектури та будівництва

Обговорено і схвалено на засіданні кафедри архітектури та будівництва ЗВО “Університет Короля Данила” (протокол №2 від «23 вересня 2022 р.)

©Артим В.І., Шевчук М.О.
©ЗВО “Університет Короля Данила”, 2022 р

ЗМІСТ

Загальні вимоги до виконання та оформлення курсової роботи.....	4
Зміст курсової роботи	6
Завдання до розділу I	7
Проектний розрахунок на міцність просторової рами	8
Теоретичні нотатки до задач	11
Приклад розрахунку просторової рами	12
Завдання до розділу II	25
Розрахунок статично невизначуваних балок на міцність та жорсткість	25
Теоретичні нотатки до задачі 2	28
Приклад розрахунку статично невизначуваної балки	31
Завдання до розділу III	44
Проектно-перевірний розрахунок на стійкість стиснутого стержня	44
Теоретичні нотатки до задачі 3	47
Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість.....	52
Список рекомендованої літератури.....	61
Додатки	62

ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Мета курсової роботи – набуття додаткових теоретичних знань з вивчення інженерних методів розрахунку елементів конструкцій та споруд на міцність, жорсткість і стійкість.

Згідно освітньо-професійної програми та вимог стандарту вищої освіти України першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ступеня вищої освіти – бакалавр галузі знань «19 Архітектура та будівництво» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія (затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України від 18 березня 2021 року № 333) – кваліфікаційна робота має відображати рівень набуття випускником освітньо-професійної програми наступних компетентностей та результатів навчання:

СК-1 Здатність використовувати концептуальні наукові та практичні знання з математики, хімії та фізики для розв'язання складних практичних проблем в галузі будівництва та цивільної інженерії.

РП-1 Застосовувати основні теорії, методи та принципи математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук, сучасні моделі, методи та програмні засоби підтримки прийняття рішень для розв'язання складних задач будівництва та цивільної інженерії.

Грунтовне опанування науки про опір матеріалів в об'ємі, передбаченому силабусом, є вельми необхідним для розуміння студентами інших, спеціальних, інженерних дисциплін. Зокрема знання з опору матеріалів застосовують при розгляді задач з будівельної механіки, основ і фундаментів, при розрахунку залізобетонних і кам'яних конструкцій, металевих конструкцій, конструкцій з дерева і пластмас тощо. Курсову роботу присвячено другому модулю дисципліни «Опір матеріалів» – «Складний опір. Динаміка, міцність та стійкість пружних тіл».

Виконання курсової роботи дозволяє закріпити та поглибити знання, набуті студентами при вивченні лекційного курсу і практичних та занять, засвоїти методики та одержати досвід розв'язання основних задач опору матеріалів, опанувати навички користування довідковою літературою.

Курсова робота повинна складатись із титульного листа, змісту, вступу, трьох розділів, кожен з яких містить як мінімум одну практичну задачу, та переліку використаних джерел.

Розрахунково-пояснювальна записка і графічний матеріал оформляється на листах формату А4. Перший лист (після титульного) містить основний напис (форма 2), всі інші – скорочену форму основного напису (форма 2а), як для текстових конструкторських документів згідно з нормами ЄСКД. Текстова частина повинна бути виконана на одній стороні листа. Рисунки повинні бути виконані акуратно із застосуванням креслярських інструментів, або за допомогою векторних чи гібридних графічних редакторів (Corel Draw, AutoCAD тощо). Розв’язування задач повинно супроводжуватись поясненнями та послідовним і детальним викладенням усіх розрахунків. На рисунках слід показувати всі об’єкти, позначення, числові величини та їх розмірності, осі координат тощо, які фігурують у тексті.

Роботи, що не відповідають переліченим вимогам, не рецензуються по суті і відправляються на дооформлення.

ЗМІСТ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Курсова робота повинна складатись із титульного листа, змісту, вступу, трьох розділів та переліку використаних джерел.

Вступ обов'язково повинен містити такі відомості:

- наука про опір матеріалів – визначення, завдання науки, зв'язок з іншими дисциплінами;
- основні гіпотези, принципи та припущення прийняті в опорі матеріалів;
- поняття про внутрішні сили (силові фактори) та метод перерізів;
- поняття про напруження;
- модель де формівного стержня в опорі матеріалів.

Знання вище переліченого матеріалу конче необхідне для глибокого розуміння методик і прийомів, що застосовуватимуться при написанні розрахункових частин основних розділів курсової роботи.

Робота містить такі розділи (та підрозділи).

Розділ 1. Проектний розрахунок на міцність просторової рами.

1.1 Основні теоретичні відомості про розрахунок на міцність просторових стержневих систем.

1.2 Задача 1.

Розділ 2. Розрахунок статично невизначуваних балок на міцність та жорсткість.

2.1 Основні теоретичні відомості про розрахунок статично невизначуваних систем.

2.2 Задача 2.

Розділ 3. Проектно-перевірний розрахунок на стійкість стиснутого стержня.

3.1 Основні теоретичні відомості про стійкість пружних систем.

3.2 Задача 3.

Кожен розділ слід починати із коротких теоретичних відомостей в об'ємі, що дозволить легко виконувати подальші розрахунки. Іншими словами, в основних теоретичних відомостях до розділу необхідно детально (з ілюстраціями та прикладами) подати визначення, правила, закони, формули; означити та розшифрувати позначення, величини, константи тощо, які

використовуються при розв'язуванні задач. При опрацюванні основних теоретичних відомостей до розділів роботи бажано користуватись рекомендованою літературою.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

3.1 Проектний розрахунок на міцність просторової рами

Задано сталеву просторову раму $ABCD$ (рис. 3.1) під дією зовнішнього статичного навантаження. Рама жорстко закріплена в перерізі A . Усі ланки рами завдовжки a . Значення зосереджених сил P_1 , P_2 , зосередженого моменту M та інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження q подані в таблиці 3.1.

Необхідно:

1. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів, що виникають у перерізах просторової рами:

- епюри поперечних сил Q_y , Q_z ;
- епюру поздовжніх сил N_x ;
- епюри згинальних моментів M_z , M_y ;
- епюру крутного моменту M_x .

2. Аналізуючи побудовані епюри визначити вид деформації в небезпечному поперечному перерізі кожної ланки – DC , CB , BA просторової рами.

3. Для ланки DC підібрати розміри прямокутного поперечного перерізу із співвідношенням сторін h/b (раціонально розмістивши переріз).

4. Для ланки CB підібрати розміри кільцевого поперечного перерізу із співвідношенням діаметрів $\alpha = d_6 / d_3$.

5. Для ланки BA підібрати розмір круглого поперечного перерізу.

6. Побудувати епюри нормальних σ і дотичних τ напружень, які виникають в небезпечних перерізах ланок спроектованої рами та виконати перевірки розрахунки на міцність.

Значення границі текучості матеріалу рами σ_T та необхідного коефіцієнту запасу міцності n задані в таблиці 3.1.

Примітка. При виконанні розрахунків на міцність за лінійного напруженого стану скористатись умовою міцності за допустимими нормальними напруженнями. При складному напруженому стані використати III-ю чи IV-ту теорії міцності.

Таблиця 3.1. Числові дані до завдання "Проектний розрахунок на міцність просторової рами"

№	$a, м$	$P_1, кН$	$P_2, кН$	$M, кНм$	$q, кН/м$	$\frac{h}{b}$	α	$\sigma_T, МПа$	n
1	1,5	3	4	6	2	1,5	0,9	320	2,0
2	2,0	4	5	4	3	2	0,8	324	1,8

3	2,5	5	3	8	4	2,5	0,6	374	2,2
4	3,0	3	5	6	4	1,5	0,7	360	2,4
5	1,5	5	4	4	3	2	0,8	429	2,6
6	2,0	4	3	8	2	2,5	0,9	323	1,9
7	2,5	3	4	6	3	1,5	0,7	420	2,1
8	3,0	4	5	4	2	2	0,6	437	2,3
9	1,5	3	4	8	4	2,5	0,8	350	2,5
10	2,0	5	4	6	2	1,5	0,9	360	2,0

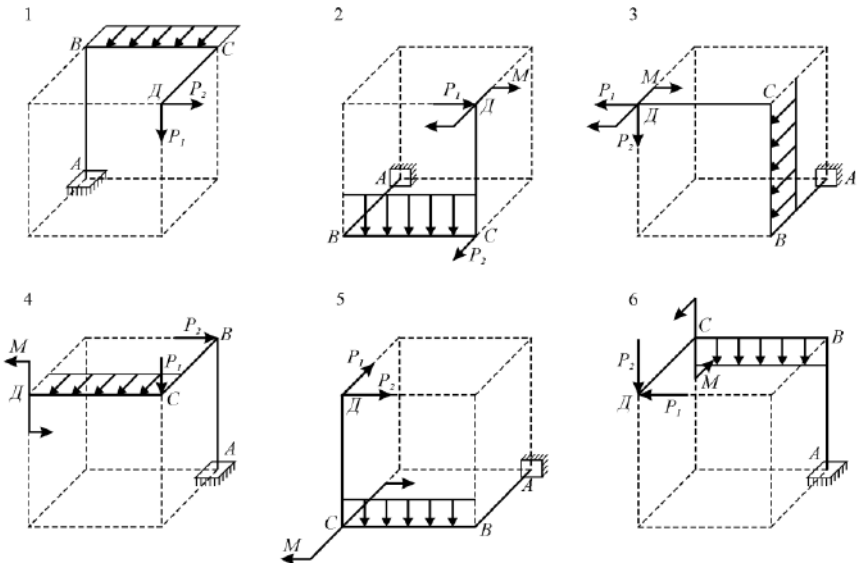


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми просторових рам, аркуш 1

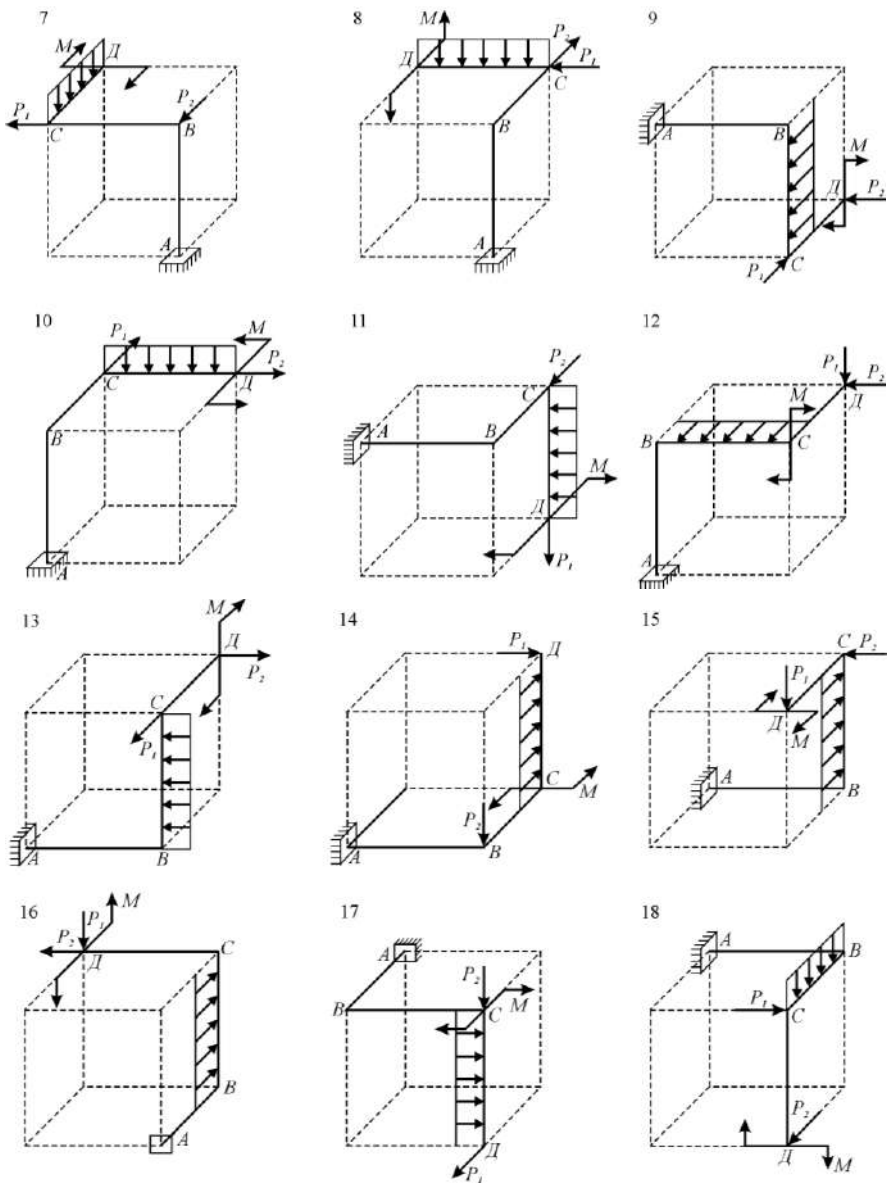


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми просторових рам, аркуш 2

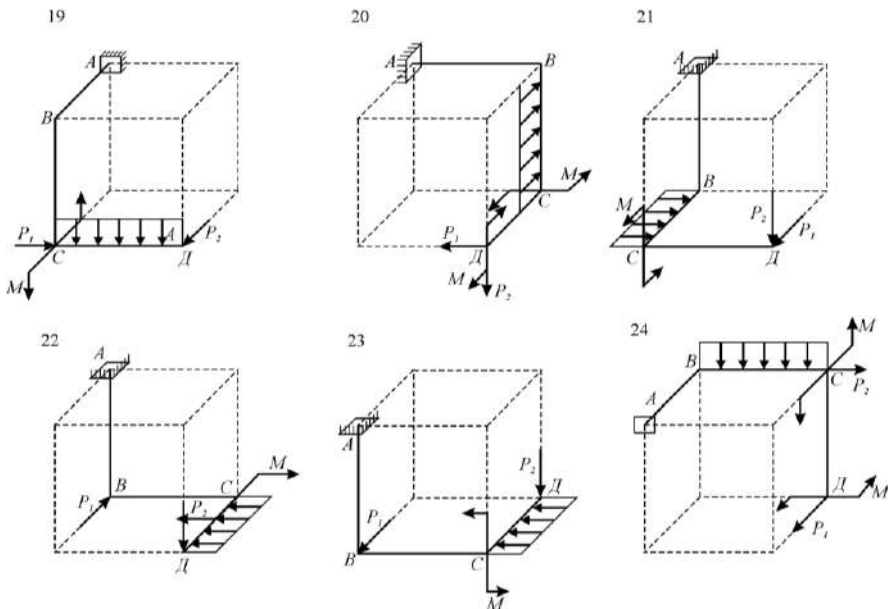


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми просторових рам, аркуш 3

3.2 Теоретичні нотатки до ЗАДАЧІ 1

При навантаженні просторової рами в її поперечних перерізах можуть виникати шість внутрішніх зусиль. Побудову епюр цих зусиль виконують методом перерізів.

Попередньо для кожної ланки рами необхідно вибрати просторову прямокутну систему координат xuz . Вісь x цієї системи повинна співпадати із поздовжньою віссю ланки, осі y та z проходять через центр ваги поперечного перерізу ланки і лежать в його площині. Додатні напрямки осей вибирають довільно.

Поперечні сили, які паралельні до осей y та z , позначають Q_y та Q_z відповідно, а згинальні моменти відносно цих осей – M_y та M_z . Поздовжню силу позначають N , а крутний момент M_x .

Прийняті наступні правила знаків.

Проекції сил на осі y та z додатні, якщо їх напрямки співпадають з додатними напрямками цих осей, тобто

$$Q_y = \sum Y_i, \quad Q_z = \sum Z_i.$$

Поздовжні сили N додатні при розтягу і від’ємні при стисканні.

Крутний момент M_x додатний, якщо при погляді в торець відрізаної частини рами цей момент спрямований за ходом годинникової стрілки.

Додатні напрямки внутрішніх сил Q_y , Q_z та N і крутного моменту M_x подані на рис. 3.2.

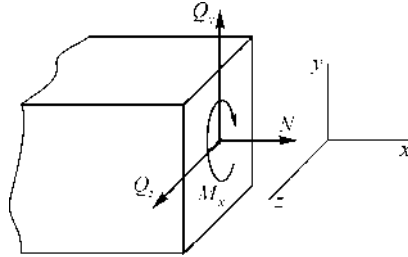


Рисунок 3.2– Додатні напрямки внутрішніх зусиль

Для згинальних моментів M_y та M_z правила знаків не встановлюють, а їх епюри зображають з боку стиснутих волокон рами.

При обчисленні внутрішніх зусиль в довільному попереччі враховують всі зовнішні сили та моменти, які прикладені з одного боку від цього попереччя.

Для здійснення оцінки міцності рами слід скористатись теоретичним матеріалом розділу “Складний опір” [1–3, 7–9].

3.3 Приклад розрахунку просторової рами

Розглянемо просторову раму $ABCD$ (рис. 3.3, a), яка навантажена зосередженими силами $P_1 = 4кН$, $P_2 = 5кН$, зосередженим моментом $M = 6кНм$ та рівномірно розподіленим навантаженням з інтенсивністю $q = 3кН/м$. Усі ланки рами завдовжки $a_1 = a_2 = a_3 = a = 2м$. Границя текучості матеріалу рами $\sigma_T = 320МПа$, а необхідний коефіцієнт запасу міцності $n = 2$. Для ланки DC співвідношення сторін прямокутного поперечного перерізу $h/b = 2$. Для ланки CB співвідношення діаметрів кільцевого поперечного перерізу $\alpha = d_g/d_3 = 0,6$.

1 Будуємо епюри внутрішніх зусиль.

Для кожної ланки рами вибираємо просторову прямокутну систему координат x_i, y_i, z_i та зображаємо вибрані системи координат на розрахун-

ковій схемі рами (рис. 3.3, б). Нумеруємо ділянки йдучи від вільного торця рами.

Ділянка I (ДС), $0 \leq x_1 \leq 2m$.

Поперечні та поздовжня сили: $Q_{y1} = -P_1 = -4кН$; $Q_{z1} = 0$;
 $N_1 = 0$.

Згинальні та крутний моменти: $M_{z1} = P_1 x_1$, $M_{z1}(0) = 0$,
 $M_{z1}(2) = 4 \cdot 2 = 8кНм$ (с.нижні.в.); $M_{y1} = M = 6кНм$ (с.праві.в.);
 $M_{x1} = 0$.

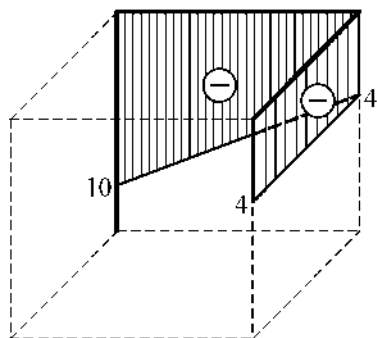
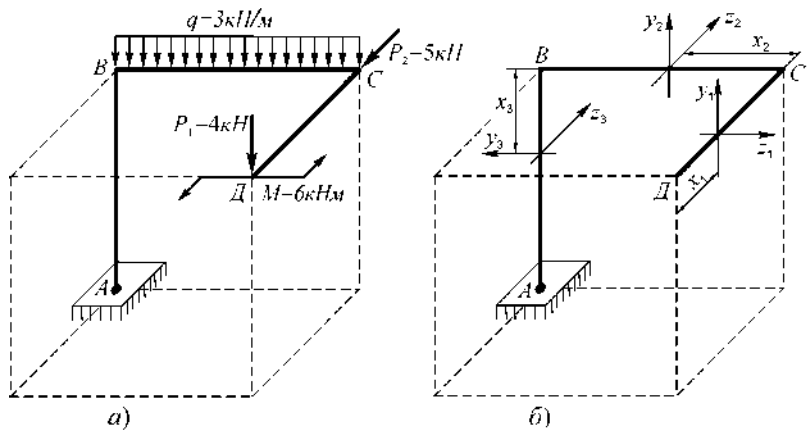
Ділянка II (СВ), $0 \leq x_2 \leq 2m$.

$Q_{y2} = -P_1 - qx_2$, $Q_{y2}(0) = -4кН$, $Q_{y2}(2) = -4 - 3 \cdot 2 = -10кН$;
 $Q_{z2} = -P_2 = -5кН$; $N_2 = 0$.

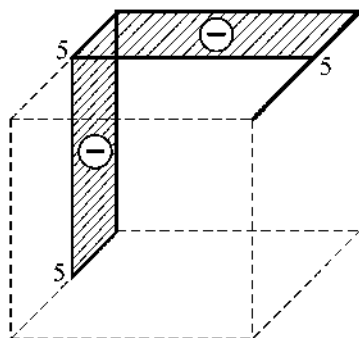
$M_{z2} = P_1 x_2 + \frac{qx_2^2}{2}$, $M_{z2}(0) = 0$, $M_{z2}(2) = 4 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 2^2}{2} =$
 $= 14кНм$ (с.ниж.в.); $M_{y2} = M - P_2 x_2$, $M_{y2}(0) = 6кНм$ (с.задні в.),
 $M_{y2}(2) = 6 - 5 \cdot 2 = -4кНм$ (с.передні в.); $M_{x2} = -P_1 \cdot a_1 = -4 \cdot 2 =$
 $= -8кНм$.

Ділянка III (ВА), $0 \leq x_3 \leq 2m$.

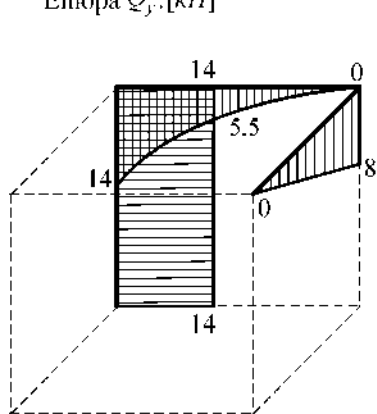
$Q_{y3} = 0$; $Q_{z3} = -P_2 = -5кН$; $N_3 = -P_1 - q \cdot a_2 = -4 - 3 \cdot 2 =$
 $= -10кН$.



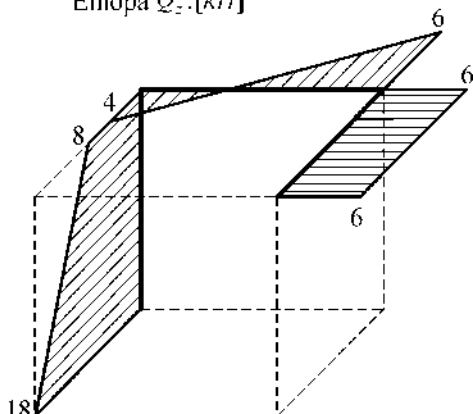
Епюра Q_y . [κН]



Епюра Q_z . [κН]



Епюра M_z . [κНм]



Епюра M_y . [κНм]

Рисунок 3.3 – Побудова епюр для просторової рами, аркуш 1

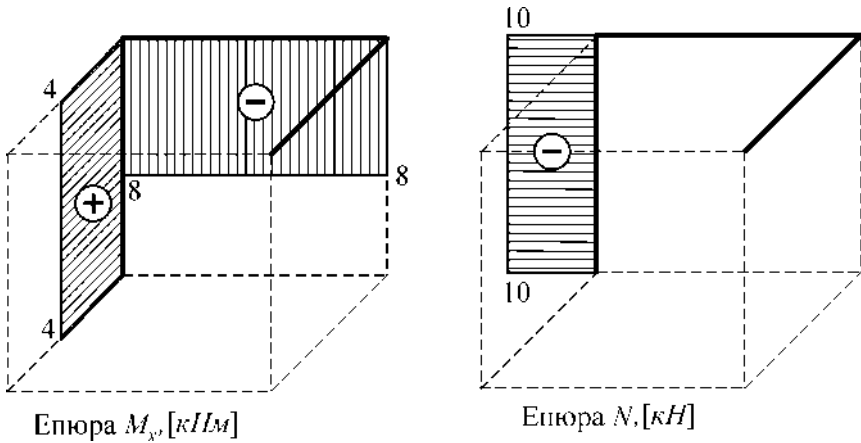


Рисунок 3.3 – Побудова епюр для просторової рами, аркуш 2

$$M_{z3} = P_1 \cdot a_2 + qa_2 \cdot \frac{a_2}{2} = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14 \text{ кНм (стис. праві в.)};$$

$$M_{y3} = P_1 \cdot a_1 + P_2 x_3, M_{y3}(0) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кНм (с.передні в.)}, M_{y3}(2) = 8 + 5 \cdot 2 = 18 \text{ кНм (с.передні в.)};$$

$$M_{x3} = -M + P_2 \cdot a_2 = -6 + 5 \cdot 2 = 4 \text{ кНм}.$$

2 Визначасмо вид деформації в небезпечному поперечному перерізі кожної ланки просторової рами.

При розрахунку на міцність впливом поперечних сил Q_y , Q_z нехтуємо. Аналізуємо побудовані епюри (рис. 3.3).

– Ланка DC . Небезпечне попереччя C . Тут виникають згинальні моменти: $M_{z1} = 8 \text{ кНм}$; $M_{y1} = 6 \text{ кНм}$. Решта зусиль дорівнюють нулю. Зважаючи на те, що попереччя цієї ланки – прямокутник, маємо косий згин.

– Ланка CB . Небезпечне попереччя B . Тут виникають згинальні моменти $M_{z2} = 14 \text{ кНм}$, $M_{y2} = 4 \text{ кНм}$ та крутний момент $M_{x2} = -8 \text{ кНм}$, отже, маємо згин із крученням.

– Ланка BA . Небезпечне попереччя A . Тут виникають згинальні моменти $M_{z3} = 14 \text{ кНм}$, $M_{y3} = 18 \text{ кНм}$, крутний момент $M_{x3} = 4 \text{ кНм}$ та поздовжня сила $N_3 = -10 \text{ кН}$, отже, маємо згин із крученням та стискуванням.

3 Для ланки *ДС* підбираємо розміри прямокутного поперечного перерізу.

Розташовуємо прямокутне попереччя так, щоб більший зі складових моментів обертався навколо осі максимальної згинальної жорсткості (вісь відносно якої осьовий момент інерції попереччя має максимальне значення). Якщо $M_{z_1} > M_{y_1}$, то розміщуємо прямокутне попереччя так, щоб $J_{z_1} > J_{y_1}$ (рис. 3.4).

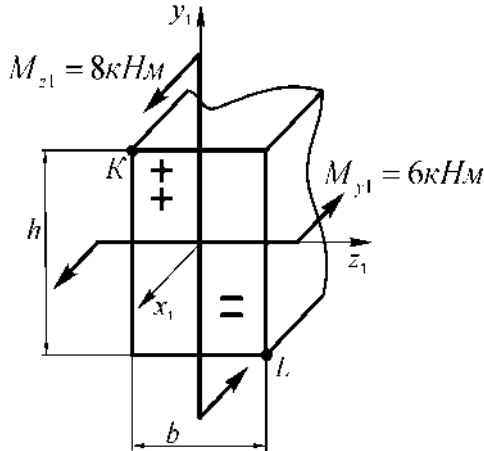


Рисунок 3.4 – Рациональне розташування прямокутного поперечного перерізу

Найбільші розтягуючі напруження виникатимуть у точці *K*, а найбільші стискаючі – у точці *L*. Умова міцності при косому згині

$$\sigma_{\max 1} = \sigma_K = \frac{M_{z_1}}{W_{z_1}} + \frac{M_{y_1}}{W_{y_1}} \leq [\sigma]. \quad (3.1)$$

Тут осьові моменти опору прямокутного попереччя:

$$W_{z_1} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3, \quad W_{y_1} = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3}b^3. \quad (3.2)$$

Підставивши (3.2) в (3.1) одержимо

$$\frac{3}{2} \frac{M_{z_1}}{b^3} + \frac{3M_{y_1}}{b^3} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{1}{b^3} \left(\frac{3}{2} M_{z_1} + 3M_{y_1} \right) \leq [\sigma],$$

звідси необхідний розмір прямокутного попереччя

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{1}{[\sigma]} \left(\frac{3}{2} M_{z1} + 3M_{y1} \right)}. \quad (3.3)$$

Виконуємо обчислення:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{1}{160 \cdot 10^6} \left(\frac{3}{2} 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 6 \cdot 10^3 \right)} = 0,057 \text{ м} = 57 \text{ мм}; \quad h = 2 \cdot b = 114 \text{ мм}.$$

Тут допустиме нормальне напруження $[\sigma] = \sigma_T / n = 320 / 2 = 160 \text{ МПа}$.

Отже, необхідні розміри поперечного перерізу ланки ДС – $h \times b = 114 \times 57 \text{ мм}$.

4 Для ланки СВ обчислимо необхідні розміри кільцевого поперечного перерізу.

На рис. 3.5, а схематично зображено напрямки внутрішніх зусиль в небезпечному попереччі ланки СВ та позначено зони де знаходяться небезпечні точки.

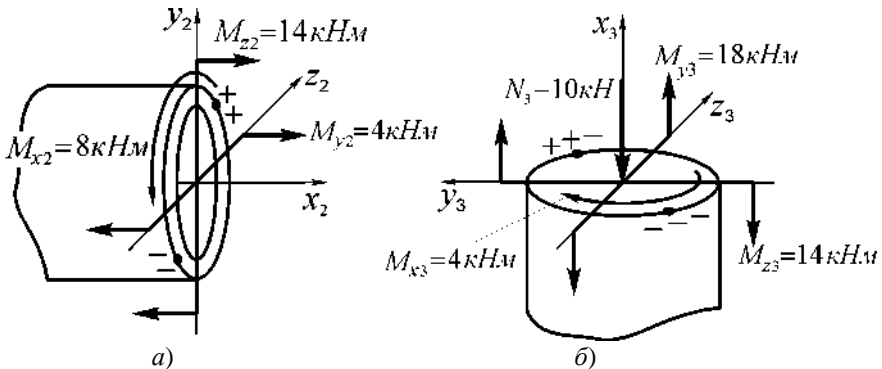


Рисунок 3.5 – Внутрішні зусилля в небезпечному поперечному перерізі: а – ланка СВ; б – ланка ВА

Умова міцності (за III-ю теорією міцності) має вигляд:

$$\sigma_{екв2}^{III} = \frac{M_{зв2}}{W_2} = \frac{\sqrt{M_{z2}^2 + M_{y2}^2 + M_{x2}^2}}{W_2} \leq [\sigma]. \quad (3.4)$$

Осьовий момент опору кільцевого попереччя

$$W_2 = \frac{\pi d_3^3}{32} \left(1 - \left[\frac{d_6}{d_3} \right]^4 \right) = \frac{\pi d_3^3}{32} (1 - \alpha^4). \quad (3.5)$$

Підставивши (3.5) в (3.4) одержимо

$$\frac{32\sqrt{M_{z2}^2 + M_{y2}^2 + M_{x2}^2}}{\pi d_3^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma], \quad (3.6)$$

звідси необхідний зовнішній діаметр кільцевого попереччя

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_{z2}^2 + M_{y2}^2 + M_{x2}^2}}{\pi[\sigma](1 - \alpha^4)}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(14 \cdot 10^3)^2 + (4 \cdot 10^3)^2 + (8 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 0,107 \text{ м} = 107 \text{ мм},$$

внутрішній діаметр $d_6 = \alpha d_3 = 0,6 \cdot 107 = 64 \text{ мм}$.

5 Для ланки ВА підберемо розмір круглого поперечного перерізу (рис. 3.5, б).

З міркувань математичної зручності у першому наближенні нехтуємо впливом поздовжньої сили N_3 і знайдемо потрібний розмір попереччя з умови міцності при сумісному згині із крученні (пізніше, при виконанні пункту 6, виконаємо перевірний розрахунок і з'ясуємо чи такий крок був прийнятним).

Умова міцності (за III-ю теорією міцності) має вигляд:

$$\sigma_{екв3}^{III} = \frac{M_{зв3}}{W_3} = \frac{\sqrt{M_{z3}^2 + M_{y3}^2 + M_{x3}^2}}{W_3} \leq [\sigma]. \quad (3.7)$$

Осьовий момент опору круглого попереччя

$$W_2 = \frac{\pi D^3}{32}. \quad (3.8)$$

Підставивши (3.8) в (3.7) одержимо

$$\frac{32\sqrt{M_{z3}^2 + M_{y3}^2 + M_{x3}^2}}{\pi D^3} \leq [\sigma], \quad (3.9)$$

звідси необхідний діаметр круглого попереччя

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_{z3}^2 + M_{y3}^2 + M_{x3}^2}}{\pi[\sigma]}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{(14 \cdot 10^3)^2 + (18 \cdot 10^3)^2 + (4 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,114 \text{ м} = 114 \text{ мм}.$$

6 Виконуємо перевіріні розрахунки на міцність та будуємо епюри нормальних σ і дотичних τ напружень, які виникають в небезпечних перерізах ланок спроектованої рами.

Ланка ДС. За формулами (3.2) обчислюємо осьові моменти опору підбраного прямокутного попереччя:

$$W_{z1} = \frac{2}{3} b^3 = \frac{2}{3} 0,057^3 = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$W_{y1} = \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} 0,057^3 = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Напруження в небезпечних точках перерізу

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_K \\ \sigma_L \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \sigma_{\max 1} \\ \sigma_{\min 1} \end{array} \right\} = \pm \frac{M_{z1}}{W_{z1}} \pm \frac{M_{y1}}{W_{y1}} = \pm \frac{8 \cdot 10^3}{1,25 \cdot 10^{-4}} \pm \frac{6 \cdot 10^3}{6,25 \cdot 10^{-5}} = \pm 160 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$\sigma_{\max 1} = [\sigma]$, умова міцності виконується.

Для побудови епюри напружень визначимо положення силової та нульової ліній і позначимо їх на схемі (рис. 3.6):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{y1}}{M_{z1}} = \frac{6}{8} = 0,75 \Rightarrow \varphi = 36^\circ 53';$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \frac{J_{z1}}{J_{y1}} = -\operatorname{tg} \varphi \left(\frac{h}{b} \right)^2 = -0,75 \cdot 4 = -3 \Rightarrow \alpha = -71^\circ 34'.$$

Далі виконуємо допоміжні побудови, відкладаємо значення σ_K та σ_L у відповідних напрямках та будуємо епюру σ (рис. 3.6).

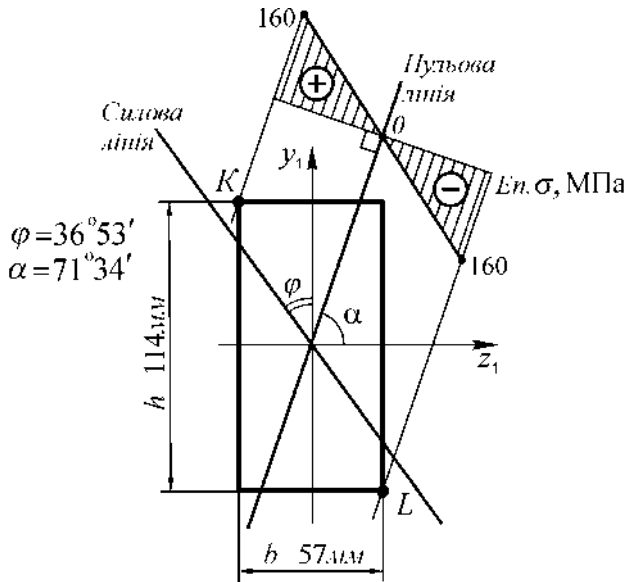


Рисунок 3.6 – Епюра напружень в небезпечному поперечному перерізі ланки ДС

Ланка СВ. Обчислюємо максимальні нормальні напруження від дії згину

$$\sigma_{\max 2} = \frac{M_{\text{сум}2}}{W_2} = \frac{32\sqrt{M_{z_2}^2 + M_{y_2}^2}}{\pi d_3^3 (1 - \alpha^4)} = \frac{32\sqrt{(14 \cdot 10^3)^2 + (4 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 0,107^3 (1 - 0,6^4)} = 139,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 139,2 \text{ МПа} .$$

Визначаємо максимальне за модулем дотичне напруження, яке спричинене крученням

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{x_2}}{W_{p_2}} = \frac{16M_{x_2}}{\pi d_3^3 (1 - \alpha^4)} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,107^3 (1 - 0,6^4)} = 38,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 38,2 \text{ МПа} , \text{ тут } W_{p_2} - \text{ полярний момент опору кільцевого поперечця.}$$

Для побудови епюр нормальних та дотичних напружень зобразимо на схемі кільцевого перерізу силову лінію (рис. 3.7):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{y2}}{M_{z2}} = \frac{4}{14} \Rightarrow \varphi = 15^\circ 57'.$$

Вкажемо положення небезпечних точок K та L , і користуючись обчисленими значеннями $\sigma_{\max 2}$ та $\tau_{\max 2}$ будемо відповідні епюри.

Максимальні еквівалентні напруження в небезпечних точках перерізу

$$\sigma_{\text{екв}2}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\max 2}^2 + 4\tau_{\max 2}^2} = \sqrt{139,2^2 + 4 \cdot 38,2^2} = 158,8 \text{ МПа} \leq [\sigma],$$

умова міцності виконується.

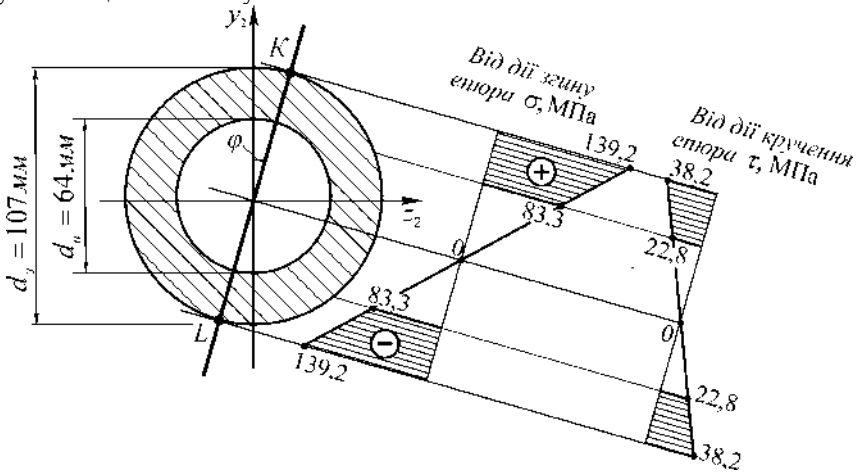


Рисунок 3.7 – Епюри напружень в небезпечному поперечному перерізі ланки CB

Ланка BA . Обчислюємо максимальне нормальне напруження від дії згину:

$$\sigma_{\max 3} = \frac{M_{\text{сум}3}}{W_3} = \frac{32\sqrt{M_{z3}^2 + M_{y3}^2}}{\pi D^3} = \frac{32\sqrt{(14 \cdot 10^3)^2 + (18 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 0,114^3} =$$

$$= 156,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 156,9 \text{ МПа}.$$

Визначаємо нормальні напруження від стискування:

$$\sigma_N = \frac{N_3}{F} = \frac{4N_3}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot (-10 \cdot 10^3)}{3,14 \cdot 0,114^2} = -0,98 \cdot 10^6 \text{ Па} = -0,98 \text{ МПа}.$$

Визначаємо максимальні дотичні напруження, які спричинені крученням

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{x3}}{W_{p3}} = \frac{16M_{x3}}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,114^3} = 13,76 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,76 \text{ МПа}.$$

Для побудови епіор напружень будемо силову лінію і позначимо положення небезпечних точок (рис. 3.8):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{y3}}{M_{z3}} = \frac{18}{14} \Rightarrow \varphi = 52^\circ 13'.$$

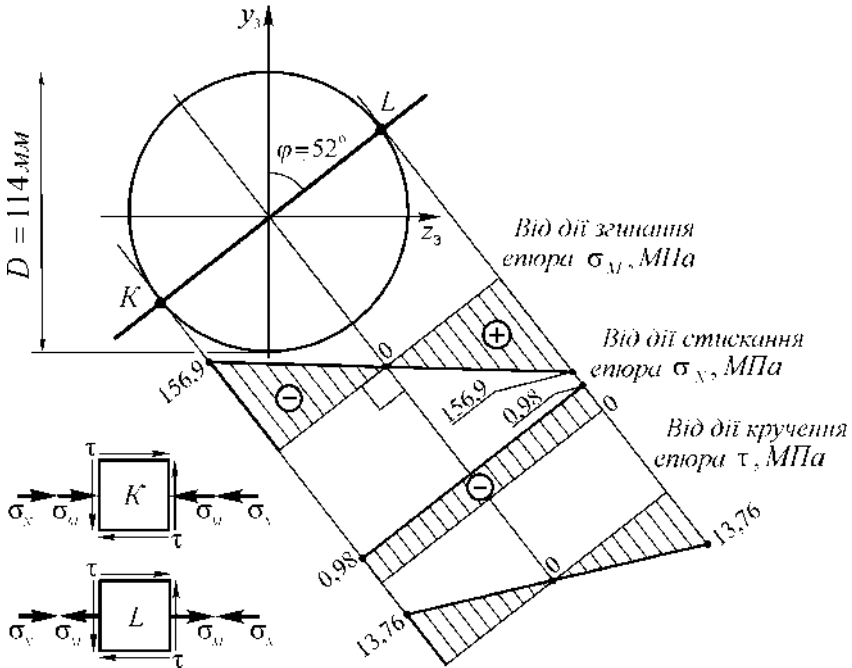


Рисунок 3.8 – Епіори напружень в небезпечному поперечному перерізі ланки BA

Максимальні еквівалентні напруження в небезпечній точці K обчислюємо на III-ю теорію міцності (рис. 3.8)

$$\sigma_{\text{екв}3}^{\text{III}} = \sqrt{(\sigma_{\max 3} + \sigma_N)^2 + 4\tau_{\max 3}^2} = \sqrt{(-156,9 - 0,98)^2 + 4 \cdot 13,76^2} = 160,1 \text{ МПа} \geq [\sigma].$$

Обчислюємо рівень перевантаження конструкції

$$\eta_3 = \frac{\sigma_{\text{екв}3}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{160,1 - 160}{160} \cdot 100\% = 0,06\% < [\eta],$$

умова міцності задовольняється. Перевантаження знаходиться в межах допуску ($[\eta] = 5\%$).

Остаточні результати проектного розрахунку на міцність подано в табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Результати проектного розрахунку

№	Назва ланки просторової рами	Форма поперечного перерізу	Розмір поперечного перерізу
1	Ланка <i>ДС</i>	Прямокутник	$h \times b = 114 \times 57 \text{ мм}$
2	Ланка <i>СВ</i>	Кільце	$d_s = 107 \text{ мм},$ $d_g = 64 \text{ мм}$
3	Ланка <i>ВА</i>	Круг	$D = 114 \text{ мм}$

Примітка. При розрахунку рам іноді доводиться стикатись із задачею про згинання із крученням стержня прямокутного попереччя. Нижче подані рекомендації щодо розрахунку на міцність такого елемента рами.

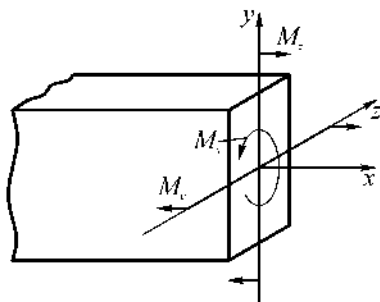


Рисунок 3.9

ний, а умова міцності має вигляд

При згині у двох площинах та крученні стержня прямокутного перерізу (рис. 3.9) виникають нормальні і дотичні напруження, епюри яких зображено на рис. 3.10. Дотичні напруження діють у площині поперечного перерізу, а нормальні – по нормалі до нього.

Небезпечною може виявитися одна з точок 1, 2 чи 3. У точці 1 нормальні напруження від згинання в обох площинах досягають екстремальних значень, а дотичні дорівнюють нулю. Напружений стан ліній-

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.10)$$

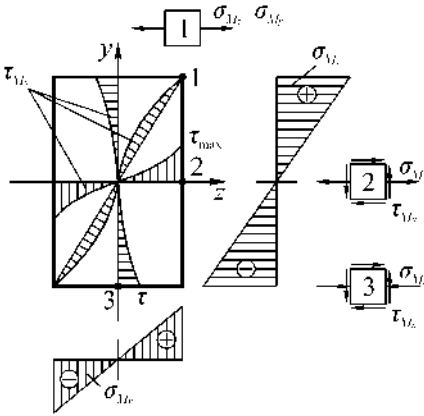


Рисунок 3.10

У точках 2 та 3 діють нормальні напруження від згину (σ_{M_y} і

σ_{M_z} відповідно) та дотичні τ_{M_x} від кручення. У цих точках напружений стан плоский, і для оцінки міцності слід скористатися однією з теорій міцності. Нагадаємо, що для оцінки міцності стержня із пластичного матеріалу зазвичай використовують третю чи четверту теорію міцності, а якщо матеріал крихкий – теорію Мора.

Наприклад, умови міцності за третьою теорією (теорією найбільших дотичних напружень) мають вигляд:

– для точки 2

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_{M_y}^2 + 4\tau_{M_x}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.11)$$

– для точки 3

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_{M_z}^2 + 4\tau_{M_x}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (3.12)$$

де $W_K = \beta hb^2$, а значення коефіцієнтів β і γ залежать від співвідношення сторін прямокутника h/b і вибираються із довідкових джерел [1, 15].

Міцність стержня буде забезпечена, якщо виконуватимуться всі три умови (3.10) – (3.12).

4 ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

4.1 Розрахунок статично невизначуваних балок на міцність та жорсткість

Задано сталеву балку (рис. 4.1), яка навантажена зосередженою силою P , зосередженим моментом M та рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q . Числові значення навантажень, розмірів, а також значення допустимого нормального напруження для матеріалу балки задані в табл. 4.1.

Необхідно:

1 Визначити ступінь статичної невизначуваності заданої балки (результат обґрунтувати).

2 Розкрити статичну невизначуваність балки, використовуючи метод сил.

2.1 Коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь методу сил обчислити графоаналітичним способом.

2.2 Перевірити правильність результатів, які отримані в підпункті 2.1, використовуючи метод Максвелла-Мора. Обчислення інтегралів можна виконати з допомогою ПК.

3 Побудувати для заданої балки епюри внутрішніх зусиль: поперечних сил Q та згинальних моментів M .

4 Виконати проектно-перевірний розрахунок балки на міцність за допустимими нормальними напруженнями. Підібрати розміри двотаврового поперечного перерізу.

5 Побудувати для заданої балки епюру кутів поворотів та обчислити максимальний за модулем кут повороту поперечного перерізу у град.

6 Побудувати для заданої балки епюру прогинів. Обчислити максимальний за модулем прогин у мм. Епюри переміщень слід будувати в одиницях жорсткості балки на згин.

7 Перевірити виконання умови жорсткості балки і за потреби відкоригувати розміри поперечного перерізу.

Примітка: на рис. 4.1, a – відстань від краю балки до зосередженої сили P ; b – відстань від краю балки до зосередженого моменту M ; d – довжина, на якій діє рівномірно розподілене навантаження.

Модуль Юнга для матеріалу балки $2 \cdot 10^{11}$ Па.

Допустима стріла прогину балки $[f] = l_i / 300$.

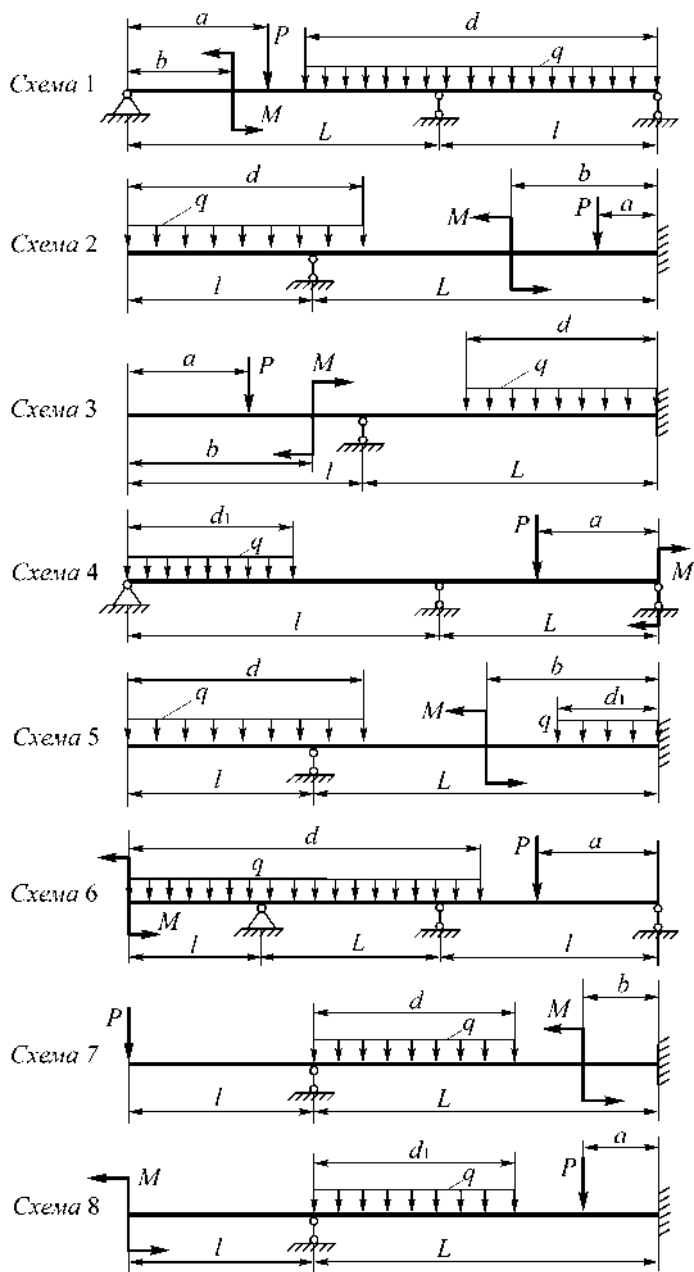


Рисунок 4.1 – Схеми статично невизначуваних балок, аркуш 1

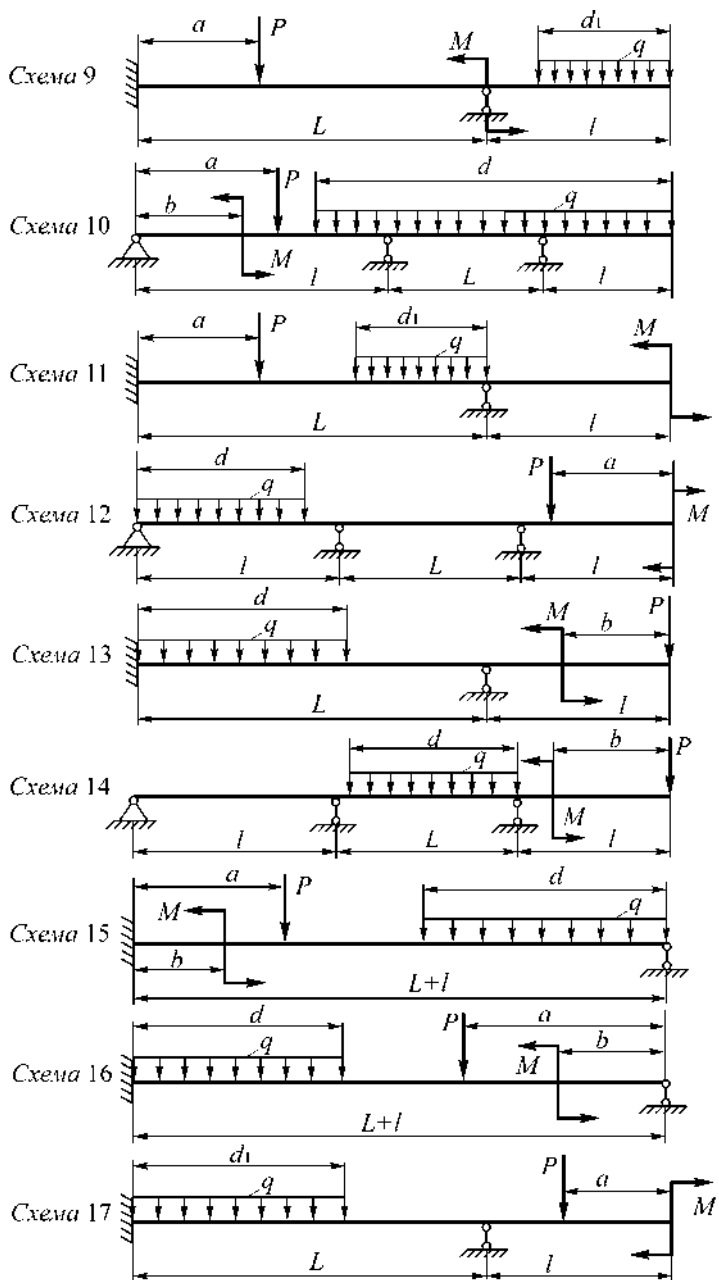


Рисунок 4.1 – Схеми статично невизначуваних балок, аркуш 2

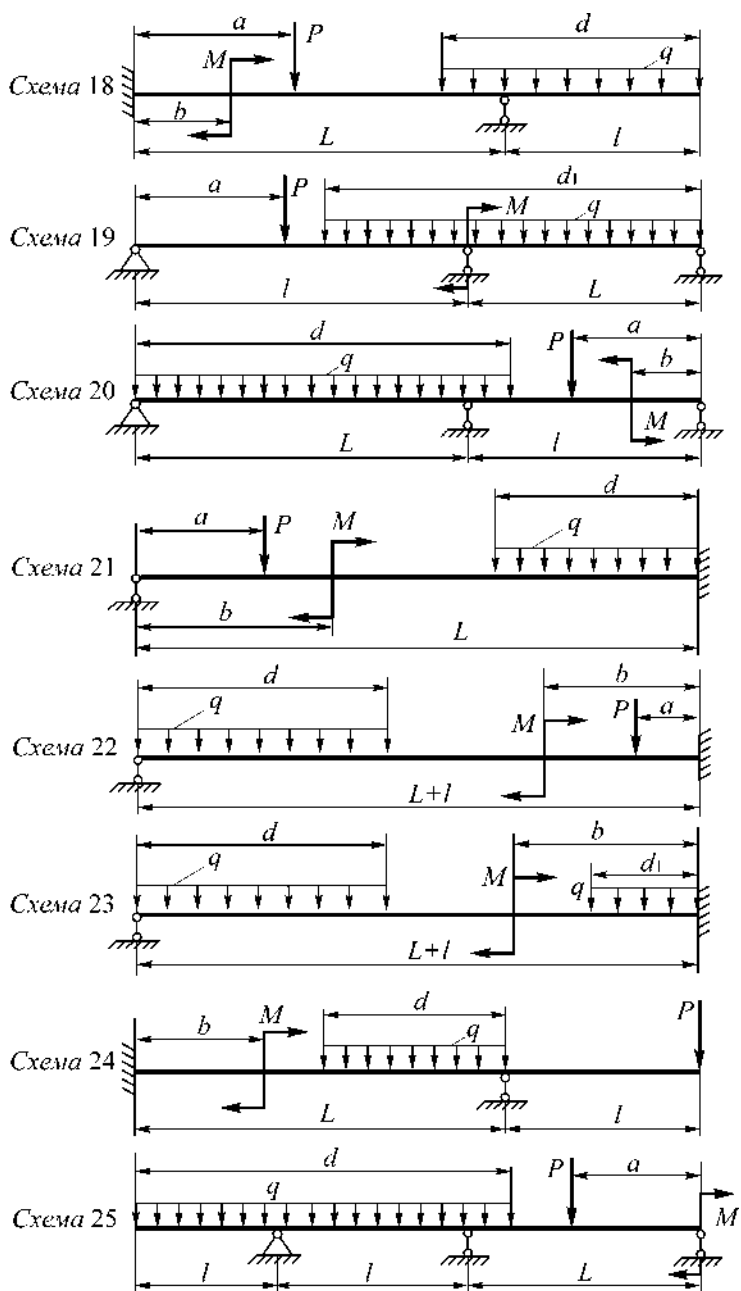


Рисунок 4.1 – Схеми статично невизначуваних балок, аркуш 3

Таблиця 4.1. Числові дані до завдання "Розрахунок статично невизначуваних балок на міцність та жорсткість"

№	l , м	L , м	P , кН	M , кНм	q , кН/м	a , м	b , м	$[\sigma]$, МПа	d , м
1	2,5	5,5	35	12	30	1,0	4,0	150	4,0
2	3	6	40	18	45	2	1,0	180	5,0
3	2,5	5	50	-14	60	2,0	3	140	6,0
4	2	4	-20	10	20	1,0	2,5	160	4,0
5	3,5	7	30	20	40	2	2	190	5,0
6	1,5	4	45	-25	70	2,5	4	200	3,0
7	4	7	-25	24	50	1,5	4	210	6,0
8	3	6	18	16	25	2	3	180	5,0
9	1	3	-27	30	30	2,5	3,5	170	2,0
10	2	4	39	-15	50	1,5	0	130	3,0

* $d_1 = 0,5d$

4.2 Теоретичні нотатки до ЗАДАЧІ 2

Особливість даної задачі в тому, що пружна система, яку ми розглядаємо, є статично невизначуваною. Тому перш ніж виконувати проектні, перевірні чи оцінкові розрахунки необхідно здійснити процедуру розкриття статичної невизначуваності. Для цього пропонується скористатись методом сил.

Розглянемо довільну n разів статично невизначувану систему (рис. 4.2, *a*). Шляхом видалення n зайвих в'язей вихідну балку перетворюють у статично визначену (рис. 4.2, *б*), яку називають основною системою методу сил. Вибрати n зайвих в'язей можна по-різному, тобто для однієї статично невизначуваної системи можна утворити кілька основних систем (тут слід керуватися тим, щоб розрахунок у вибраному варіанті основної системи був найпростішим).

Завантаживши основну систему зовнішнім навантаженням і невідомими реакціями X_1, X_2, \dots, X_n , що замінюють вплив на балку видалених в'язей, отримаємо еквівалентну систему (рис. 4.2, *в*).

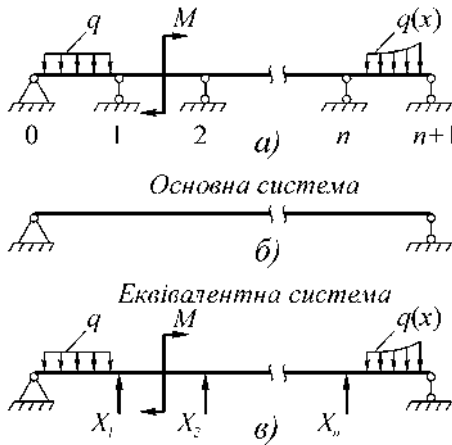


Рисунок 4.2 – Схема для запису канонічних рівнянь методу сил

X_2, \dots, X_n і заданим зовнішнім навантаженням P :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \dots + \Delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \dots + \Delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \Delta_{n1} + \Delta_{n2} + \dots + \Delta_{nn} + \Delta_{np} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

Нагадаємо, що, наприклад, позначка Δ_{12} означає прогин точки прикладання сили X_1 в напрямку її дії внаслідок впливу сили X_2 ; Δ_{1p} – прогин цієї ж точки, тільки від дії зовнішнього навантаження і т. д. Прогини Δ_{ik} можна записати як добутки питомого прогину δ_{ik} , що викликаний дією одиничної сили, на величину відповідної сили, тобто

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Тоді рівняння (4.1) набудуть вигляду

Невідомі сили $X_1, X_2, \dots,$

X_n необхідно підібрати так, щоб еквівалентна система поводилася б як реальна. Умова еквівалентності описується канонічними рівняннями методу сил. Для їх апису зазвичай прирівнюють улові (чи заздалегідь відомій величині) переміщення точок рішення видалених зайвих зв'язей.

Використовуючи принцип суперпозиції, запишемо вирази для знаходження прогинів балки в точках кріплення видалених зв'язей $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ у вигляді суми прогинів, що викликані окремо кожною невідомою силою $X_1,$

Для визначення вільних членів канонічних рівнянь $\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$ необхідно вантажну епюру M_p перемножити з відповідними одиничними епюрами $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$, або

$$\Delta_{1p} = \int_l \frac{M_p \overline{M}_1 dx}{EJ_z}; \Delta_{2p} = \int_l \frac{M_p \overline{M}_2 dx}{EJ_z}; \dots; \Delta_{np} = \int_l \frac{M_p \overline{M}_n dx}{EJ_z}.$$

Побудови епюр внутрішніх зусиль виконуватимемо, як і раніше, методом перерізів, а в елементарних випадках за характерними точками. Побудову епюр переміщень здійсимо методом початкових параметрів. Відповідні теми попереднього модуля потрібно повторити перед початком виконання завдання [1, 2, 9].

4.3 Приклад розрахунку статично невизначуваної балки

Розглянемо сталеву балку (рис. 4.3, а), яка навантажена зосередженою силою $P = 4кН$, зосередженим моментом $M = 2кНм$ та рівномірним розподіленим навантаженням з інтенсивністю $q = 6кН/м$. Балка нерозрізна і укладена на три шарнірні опори A, B та C . Допустиме нормальне напруження для матеріалу балки $120 МПа$. Допустима стріла прогину балки $[f] = l_i / 200$.

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності s заданої балки (рис. 4.3, а). Для цього обчислюємо кількість реакцій, які можуть виникати у накладених на балку в'язях – $k = 4$ (шарнірна нерухома опора A накладає на балку дві в'язі; дві шарнірні рухомі опори B, C – по одній в'язі кожна). Обчислюємо кількість незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для заданої балки – $m = 3$ (рівновага довільної плоскої системи сил описується трьома рівняннями).

Тоді

$$s = k - m = 4 - 3 = 1.$$

Отже, задана балка один раз статично невизначувана.

2 Виконуємо процедуру розкриття статичної невизначуваності балки методом сил.

Шляхом видалення однієї в'язі (видаляємо опору C) вихідну систему перетворюємо у геометрично незмінювану статично визначувану балку (рис. 4.3, б). Таким чином отримуємо основну систему методу сил.

Завантаживши основну систему зовнішнім навантаженням і невідомою реакцією X_1 , яка замінює вплив на балку видаленої в'язі, отримаємо еквівалентну систему (рис. 4.3, в).

Невідому силу X_1 необхідно підібрати так, щоб еквівалентна система поведила себе як реальна балка. Обмеження на поведінку еквівалентної системи накладаємо з допомогою канонічного рівняння методу сил для один раз статично невизначуваної балки:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (4.3)$$

2.1 Для знаходження коефіцієнта δ_{11} та вільного члена Δ_{1p} рівняння (4.3) скористаємось графоаналітичним способом.

Навантажимо основну систему методу сил зовнішнім навантаженням (рис. 4.3, з). Визначаємо реакції в опорах:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} = 0 &\Rightarrow q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_b \cdot 3 + P \cdot 6 - M = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_b &= \frac{12,5q + 6P - M}{3} = \frac{12,5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 2}{3} = 32,33 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y_i = 0 &\Rightarrow R_a - q \cdot 5 + R_b - P = 0 \Rightarrow R_a = 5q - R_b + P = \\ &= 5 \cdot 6 - 32,33 + 4 = 1,67 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ci} = R_a \cdot 7 + R_b \cdot 4 - q \cdot 5 \cdot 4,5 - P \cdot 1 - M &= 1,67 \cdot 7 + 32,33 \cdot 4 - \\ - 6 \cdot 5 \cdot 4,5 - 4 \cdot 1 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Рухаючись від лівого і правого торців балки до опори B (рис. 4.3, з), будемо вантажну епюру M_p у розшарованому вигляді (рис. 4.3, д).

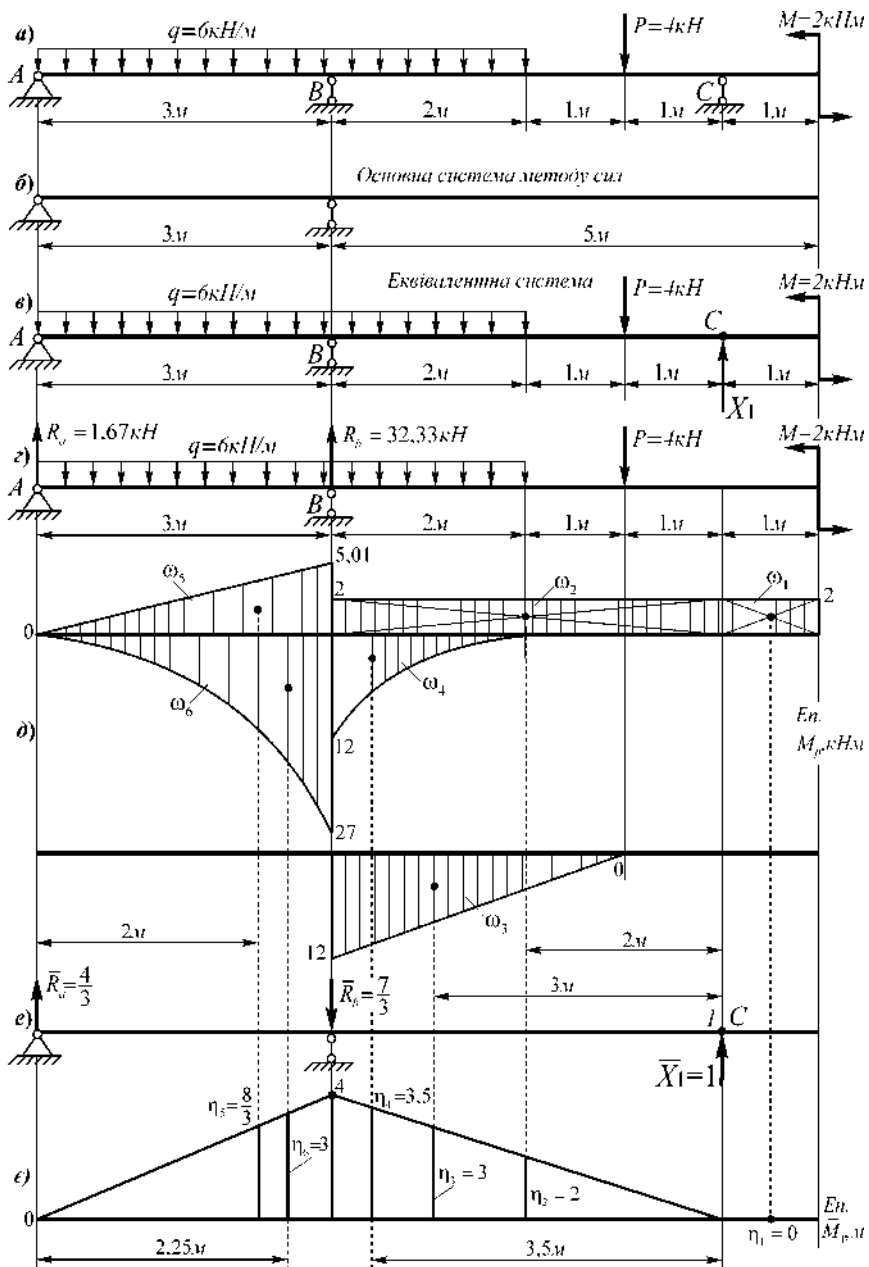


Рисунок 4.3 – Розкриття статичної невизначуваності балки

Навантажимо основну систему методу сил одиничною силою $\bar{X}_1 = 1$ в перерізі де була приєднана відкинута в'язь (рис. 4.3, е). Визначаємо реакції в опорах такої балки:

$$\sum M_{Ai} = 0 \Rightarrow \bar{R}_b \cdot 3 - \bar{X}_1 \cdot 7 = 0 \Rightarrow \bar{R}_b = 7/3;$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \bar{R}_a - \bar{R}_b + \bar{X}_1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_a = \bar{R}_b - \bar{X}_1 = 7/3 - 1 = 4/3.$$

Перевірка (визначимо суму моментів, які діють на балку відносно її правого торця):

$$\sum M_{Ti} = \bar{X}_1 \cdot 1 - \bar{R}_b \cdot 5 + \bar{R}_a \cdot 8 = 1 - \frac{7}{3} \cdot 5 + \frac{4}{3} \cdot 8 = 0.$$

Рухаючись від лівого і правого торців балки до опори B (рис. 4.3, е), будемо одиничну епору \bar{M}_1 (рис. 4.3, е).

Для обчислення коефіцієнта δ_{11} достатньо помножити графоаналітичним способом епору \bar{M}_1 саму на себе. Нагадаємо, що δ_{11} це прогин основної системи під дією одиничної сили (детальна схема подана на рис. 4.4).

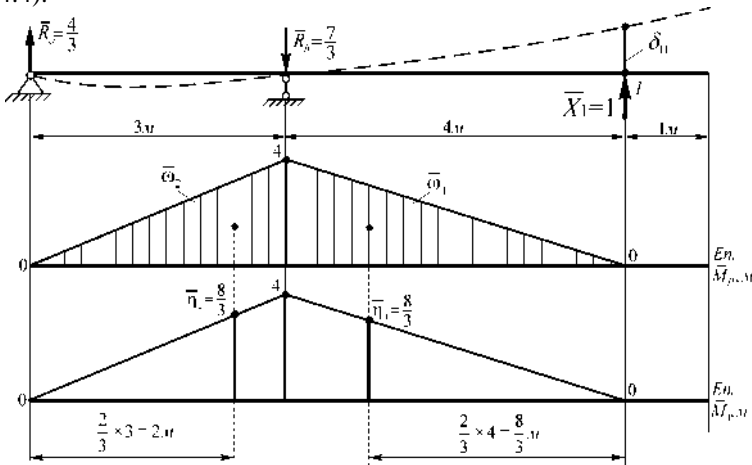


Рисунок 4.4 – Обчислення коефіцієнта δ_{11}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} (\bar{\omega}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{\eta}_2);$$

$$\bar{\omega}_1 \bar{\eta}_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{3}, \quad \bar{\omega}_2 \bar{\eta}_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{18}{3}.$$

Зауважимо, що розмірність добутку $[\bar{\omega}_i \bar{\eta}_i] = [M^3]$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{64}{3} + \frac{48}{3} \right) = \frac{112}{3EJ_z} = \frac{37,33}{EJ_z}.$$

Для обчислення вільного члена канонічного рівняння Δ_{1p} потрібно перемножити між собою графоаналітичним способом вантажну M_p та одиничну епюри \bar{M}_1 . Детальна схема, яка ілюструє процес перемноження епюр подана на рис. 4.3, *д* та рис. 4.3, *е*.

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_z} \sum_{i=1}^5 \omega_i \eta_i;$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \eta_1 &= 0; \omega_2 \eta_2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16; \omega_3 \eta_3 = -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 3 = -54; \omega_4 \eta_4 = -\frac{1}{3} \times \\ &\times 12 \cdot 2 \cdot 3,5 = -28; \omega_5 \eta_5 = \frac{1}{2} \cdot 5,01 \cdot 3 \cdot \frac{8}{3} = 20,04; \omega_6 \eta_6 = -\frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 3 \cdot 3 = \\ &= -81. \text{ Розмірність добутку } [\omega_i \eta_i] = [\kappa H M^3]. \end{aligned}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_z} (0 + 16 - 54 - 28 + 20,04 - 81) = -\frac{126,96}{EJ_z}.$$

Підставляємо обчислені значення δ_{11} та Δ_{1p} в рівняння (4.3) та знаходимо його розв'язок:

$$\frac{37,33}{EJ_z} \cdot X_1 - \frac{126,96}{EJ_z} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{126,96}{37,33} = 3,4 \kappa H.$$

Отже, реакція в опорі C статично невизначуваної балки (рис. 4.3, *а*) $R_c = X_1 = 3,4 \kappa H$. Реакції в опорах A та B знайдемо використовуючи принцип суперпозиції:

$$\begin{aligned} *R_a &= R_a + \bar{R}_a \cdot X_1 = \\ &= 1,67 + \frac{4}{3} \cdot 3,4 = 6,2 \kappa H; *R_b = R_b + \bar{R}_b \cdot X_1 = 32,33 - \frac{7}{3} \cdot 3,4 = 24,4 \kappa H. \end{aligned}$$

Статичну невизначуваність розкрито.

2.2 Переверимо правильність одержаних результатів, використовуючи метод Максвела-Мора. Зобразимо вантажний та одиничний стани балок і розіб'ємо їх на однакову кількість ділянок (рис. 4.5). Запишемо вирази згинальних моментів для обох балок:

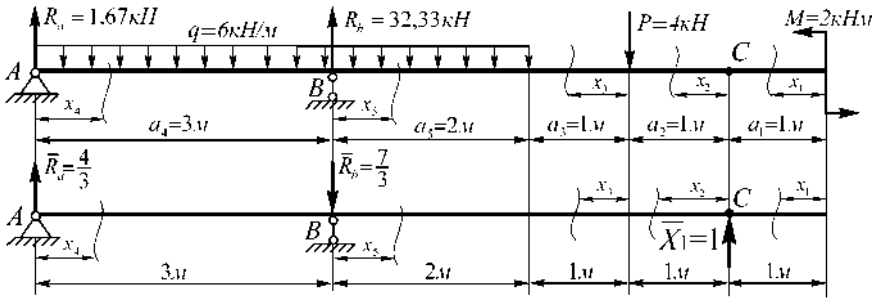


Рисунок 4.5 – Схема для використання методу Максвелла-Мора

при $0 \leq x_1 \leq a_1$, $M_{p1} = M$, $\bar{M}_1 = 0$;

при $0 \leq x_2 \leq a_2$, $M_{p2} = M$, $\bar{M}_2 = x_2$;

при $0 \leq x_3 \leq a_3$, $M_{p3} = M - Px_3$, $\bar{M}_3 = 1 + x_3$;

при $0 \leq x_4 \leq a_4$, $M_{p4} = R_a x_4 - \frac{qx_4^2}{2}$, $\bar{M}_4 = \bar{R}_a x_4$;

при $0 \leq x_5 \leq a_5$, $M_{p5} = R_a(3 + x_5) - \frac{q(3 + x_5)^2}{2} + R_b x_5$, $\bar{M}_5 = \bar{R}_a \times$
 $\times (3 + x_5) - \bar{R}_b x_5$.

Тоді

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \sum_{i=1}^5 \int_0^{a_i} (\bar{M}_i)^2 dx_i = \frac{37,33}{EJ_z};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_z} \sum_{i=1}^5 \int_0^{a_i} M_{pi} \bar{M}_i dx_i = -\frac{126,9}{EJ_z}.$$

Обчислення виконали з допомогою комп'ютерної математики у середовищі Mathcad, послідовність обчислень подана на рис. 4.6. Бачимо, що результати, які одержані при виконанні підпунктів 2.2 і 2.1 співпадають.

Вхідні числові дані:

$$R_a := 1.67 \quad R_b := 32.33 \quad q := 6 \quad P := 4 \quad M := 2 \quad R_{a1} := \frac{4}{3} \quad R_{b1} := \frac{7}{3} \quad a_1 := 1 \quad a_2 := 1 \quad a_3 := 1 \quad a_4 := 3 \quad a_5 := 2$$

Вирази згинальних моментів для вантажного стану балки:

$$M_{p1}(x) := M \quad M_{p2}(x) := M \quad M_{p3}(x) := M - P \cdot x \quad M_{p4}(x) := R_a \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad M_{p5}(x) := R_a \cdot (3 + x) + R_b \cdot x - \frac{q \cdot (x + 3)^2}{2}$$

Вирази згинальних моментів для одиночного стану балки:

$$M_{11}(x) := 0 \quad M_{12}(x) := x \quad M_{13}(x) := 1 + x \quad M_{14}(x) := R_{a1} \cdot x \quad M_{15}(x) := R_{a1} \cdot (3 + x) - R_{b1} \cdot x$$

Коефіцієнт канонічного рівняння:

$$\delta_{11} := \int_0^{a_1} (M_{11}(x))^2 dx + \int_0^{a_2} (M_{12}(x))^2 dx + \int_0^{a_3} (M_{13}(x))^2 dx + \int_0^{a_4} (M_{14}(x))^2 dx + \int_0^{a_5} (M_{15}(x))^2 dx$$

$$\delta_{11} = 37.33$$

Вільний член канонічного рівняння:

$$\Delta_{1p} := \int_0^{a_1} M_{11}(x) \cdot M_{p1}(x) dx + \int_0^{a_2} M_{12}(x) \cdot M_{p2}(x) dx + \int_0^{a_3} M_{13}(x) \cdot M_{p3}(x) dx + \int_0^{a_4} M_{14}(x) \cdot M_{p4}(x) dx \dots \\ + \int_0^{a_5} M_{15}(x) \cdot M_{p5}(x) dx$$

$$\Delta_{1p} = -126.9$$

Шукана реакція в опорі С статично невизначуваної балки:

$$X_1 := \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$$

$$X_1 = 3.4$$

Реакції в усіх опорах:

$$R_a := R_a + R_{a1} \cdot X_1 \quad R_b := R_b - R_{b1} \cdot X_1 \quad R_c := X_1$$

$$R_a = 6.2 \quad R_b = 24.4 \quad R_c = 3.4$$

Рисунок 4.6 – Обчислення реакцій в опорах статично невизначуваної балки методом Максвела-Мора.

3 Будуємо для заданої балки епюри внутрішніх зусиль: поперечних сил Q та згинальних моментів M . Розбиваємо балку на п'ять ділянок (рис. 4.7, а).

I ділянка, $0 \leq x_1 \leq 1m$

$$Q_{y1} = 0; \quad M_{z1} = M = 2kNm.$$

II ділянка, $0 \leq x_2 \leq 1m$

$$Q_{y2} = -R_c = -3,4kH;$$

$$M_{z2} = M + R_c x_2, \quad M_{z2}(0) = 2kNm, \quad M_{z2}(1) = 2 + 3,4 \cdot 1 = 5,4kNm.$$

III ділянка, $0 \leq x_3 \leq 1\text{м}$

$$Q_{y3} = -R_c + P = -3,4 + 4 = 0,6\text{кН};$$

$$M_{z3} = M + R_c(1 + x_3) - Px_3, \quad M_{z3}(0) = 5,4\text{кНм}, \quad M_{z3}(1) = 2 + 3,4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4,8\text{кНм}.$$

IV ділянка, $0 \leq x_4 \leq 3\text{м}$

$$Q_{y4} = R_a^* - qx_4, \quad Q_{y4}(0) = 6,2\text{кН}, \quad Q_{y4}(3) = 6,2 - 6 \cdot 3 = -11,8\text{кН}.$$

$$M_{z4} = R_a^* x_4 - \frac{qx_4^2}{2}, \quad M_{z4}(0) = 0, \quad M_{z4}(3) = 6,2 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 3^2}{2} =$$

$$= -8,4\text{кНм}. \text{ В одному із перерізів ділянки } \frac{dM_{z4}}{dx_4} = Q_{y4} = 0, \text{ а в околі}$$

цього перерізу епюра поперечних сил змінює знак, отже, функція згинальних моментів має екстремум. Знаходимо значення координати перерізу, в якому діє екстремальний згинальний момент:

$$R_a^* - qx_4 = 0 \Rightarrow x_4 = \frac{R_a^*}{q} = \frac{6,2}{6} = 1,03\text{м}.$$

$$\text{Тоді } \max M_{z4}(1,03) = 6,2 \cdot 1,03 - \frac{6 \cdot 1,03^2}{2} = 3,2\text{кНм}.$$

V ділянка, $0 \leq x_5 \leq 2\text{м}$

$$Q_{y5} = R_a^* - q(3 + x_5) + R_b^*, \quad Q_{y5}(0) = 6,2 - 6 \cdot 3 + 24,4 = 12,6\text{кН},$$

$$Q_{y5}(2) = 6,2 - 6 \cdot 5 + 24,4 = 0,6\text{кН};$$

$$M_{z5} = R_a^*(3 + x_5) - \frac{q(3 + x_5)^2}{2} + R_b^* x_5, \quad M_{z5}(0) = -8,4\text{кНм},$$

$$M_{z5}(2) = 6,2 \cdot (3 + 2) - \frac{6 \cdot (3 + 2)^2}{2} + 24,4 \cdot 2 = 4,8\text{кНм}.$$

Епюри поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_z подані на рис. 4.7, б та рис. 4.7, в.

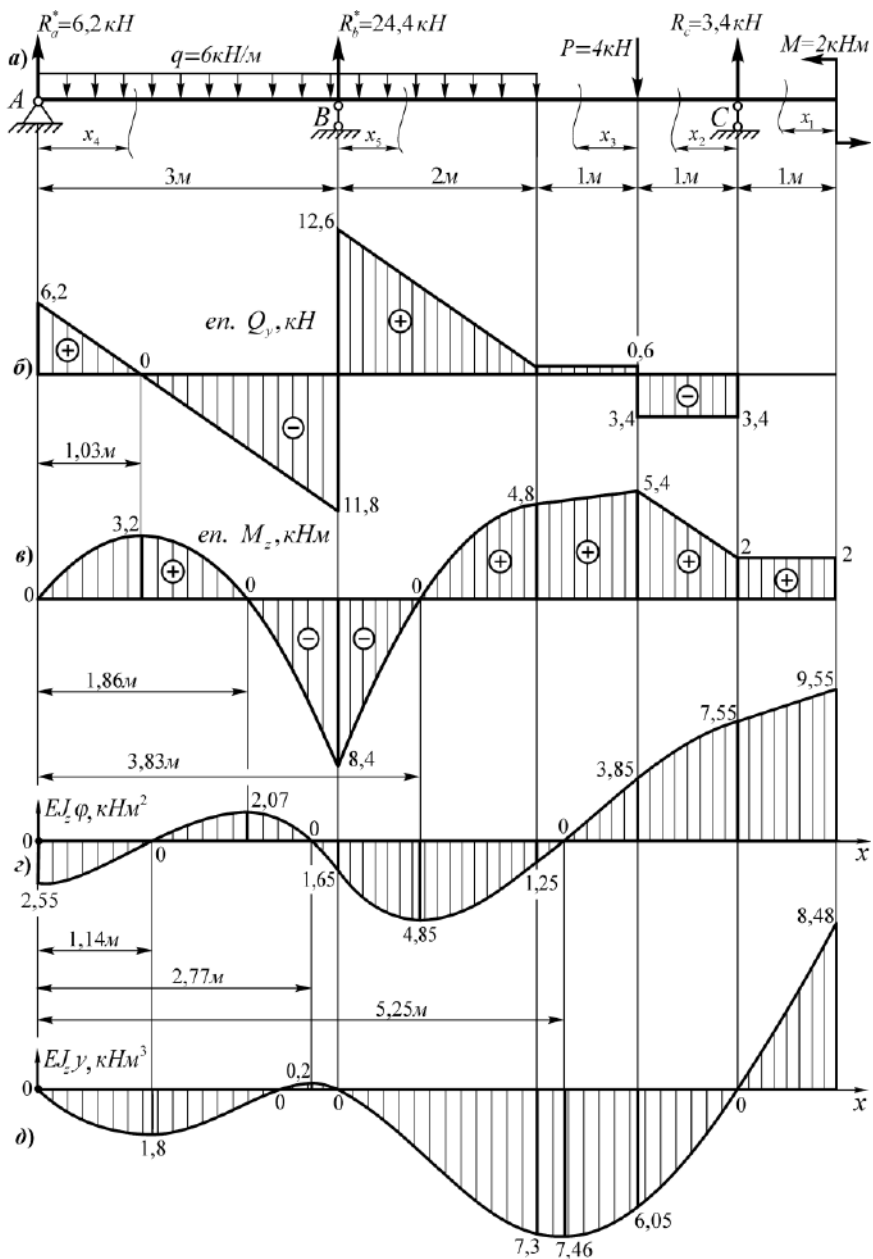


Рисунок 4.7 – Епюри внутрішніх зусиль та епюри переміщень

4 Виконуємо проектно-перевірний розрахунок балки на міцність.

Умова міцності балки за допустимими нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma],$$

звідси, необхідний осьовий момент опору поперечного перерізу балки

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8,4 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 0,07 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 70 \text{ см}^3.$$

За таблицями сортаменту прокатних сталей (ГОСТ 8239-89) вибираємо балку двотаврову №14, для якої табличне значення осьового моменту опору $W_z^{\text{табл}} = 81,7 \text{ см}^3$.

Перевіряємо міцність вибраної двотаврової балки

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z^{\text{табл}}} = \frac{8,4 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 0,103 \cdot 10^9 \text{ Па} = 103 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

Умова міцності виконується, недовантаження балки складає

$$\frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{120 - 103}{120} \cdot 100\% = 14,2\%.$$

5 Побудуємо для заданої балки епюри кутів поворотів $\varphi(x)$ та прогинів $y(x)$ і обчислимо максимальний за модулем кут повороту та прогин.

Скористаємось методом початкових параметрів. Вибрані стаціонарні декартові системи координат з початком на лівому краю балки показані на рис. 4.7, з, д. Балка починається з шарнірної опори, отже, $y_0 = 0$, $\varphi_0 \neq 0$. Для визначення кута повороту на початку балки запишемо одну крайову умову:

$$\text{при } x = 3 \text{ м, } y(3) = 0.$$

Деталізуємо цю умову

$$EJ_z y(3) = EJ_z \varphi_0 \cdot 3 + \frac{R_a^* \cdot 3^3}{3!} - \frac{q \cdot 3^4}{4!} = 0,$$

звідси одержимо

$$EJ_z \varphi_0 = \frac{1}{3} \left(-\frac{R_a^* \cdot 3^3}{3!} + \frac{q \cdot 3^4}{4!} \right) = \frac{1}{3} \left(-\frac{6,2 \cdot 3^3}{6} + \frac{6 \cdot 3^4}{24} \right) = -2,55 \text{ кНм}^2.$$

Функція кутів поворотів для всієї балки має вигляд

$$EJ_z \varphi(x) = EJ_z \varphi_0 + \frac{R_a^* x^2}{2!} - \frac{qx^3}{3!} + \frac{R_b^* (x-3)^2}{2!} \Big|_{x \geq 3} + \frac{q(x-5)^3}{3!} \Big|_{x \geq 5} -$$

$$- \frac{P(x-6)^2}{2!} \Big|_{x \geq 6} + \frac{R_c (x-7)^2}{2!} \Big|_{x \geq 7} .$$

Функція прогинів для всієї балки

$$EJ_z y(x) = EJ_z \varphi_0 x + \frac{R_a^* x^3}{3!} - \frac{qx^4}{4!} + \frac{R_b^* (x-3)^3}{3!} \Big|_{x \geq 3} + \frac{q(x-5)^4}{4!} \Big|_{x \geq 5} -$$

$$- \frac{P(x-6)^3}{3!} \Big|_{x \geq 6} + \frac{R_c (x-7)^3}{3!} \Big|_{x \geq 7} .$$

Табуляцію функцій переміщень, знаходження їх локальних екстремумів і побудову графіків виконуємо з допомогою ПК в середовищі Mathcad. Роздруківка програми і результатів основних обчислень подана на рис. 4.8. Побудовані епюри переміщень з вказаними характерними числовими значеннями зображено на рис. 4.7, з, д.

Максимальний кут повороту балки виникає при $x = 8\text{ м}$ і відбувається в напрямку проти ходу годинникової стрілки

$$\max \varphi = \frac{9,55 \cdot 10^3}{EJ_z} = \frac{9,55 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0083 \text{ рад} \approx 0,5 \text{ град}.$$

Максимальний прогин балки виникає при $x = 8\text{ м}$ (спрямований вгору)

$$\max y = \frac{8,48 \cdot 10^3}{EJ_z} = \frac{8,48 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0074 \text{ м} = 7,4 \text{ мм}.$$

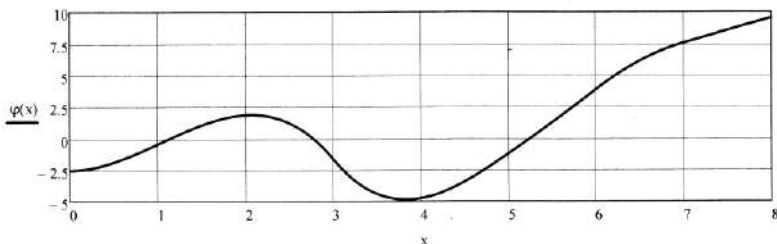
6 Перевіримо виконання умови жорсткості балки.

Умова жорсткості балки задається в такому вигляді:

Ra := 6.2 Rb := 24.4 Rc := 3.4 q := 6 P := 4 φ0 := -2.55

$$\varphi(x) := \varphi_0 + \left(\frac{Ra \cdot x^2}{2}\right) - \left(\frac{q \cdot x^3}{6}\right) + \left[\frac{Rb \cdot (x-3)^2}{2}\right] \cdot (x \geq 3) + \left[\frac{q \cdot (x-5)^3}{6}\right] \cdot (x \geq 5) - \left[\frac{P \cdot (x-6)^2}{2}\right] \cdot (x \geq 6) + \left[\frac{Rc \cdot (x-7)^2}{2}\right] \cdot (x \geq 7)$$

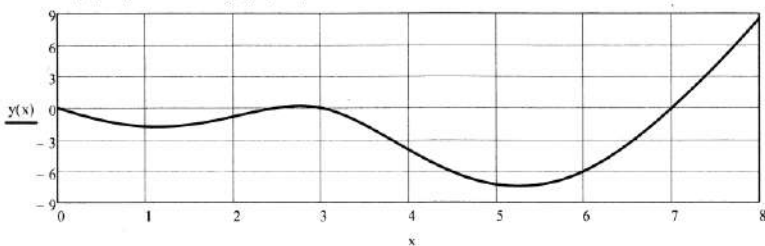
Графік кутів повороту поперечних перерізів балки φ(x), тут жорсткість балки EI = 1



x1 := 0, 0.5..3	x2 := 3, 3.5..5	x3 := 5, 5.5..6	x4 := 6, 6.5..7	x5 := 7, 7.5..8
x1 = φ(x1) =	x2 = φ(x2) =	x3 = φ(x3) =	x4 = φ(x4) =	x5 = φ(x5) =
0 -2.55	3 -1.65	5 -1.25	6 3.85	7 7.55
0.5 -1.9	3.5 -4.4	5.5 1.23	6.5 6.12	7.5 8.55
1 -0.45	4 -4.75	6 3.85	7 7.55	8 9.55
1.5 1.05	4.5 -3.45			
2 1.85	5 -1.25			
2.5 1.2				
3 -1.65				

$$y(x) := \varphi_0 \cdot x + \left(\frac{Ra \cdot x^3}{6}\right) - \left(\frac{q \cdot x^4}{24}\right) + \left[\frac{Rb \cdot (x-3)^3}{6}\right] \cdot (x \geq 3) + \left[\frac{q \cdot (x-5)^4}{24}\right] \cdot (x \geq 5) - \left[\frac{P \cdot (x-6)^3}{6}\right] \cdot (x \geq 6) + \left[\frac{Rc \cdot (x-7)^3}{6}\right] \cdot (x \geq 7)$$

Графік прогинів балки y(x), тут жорсткість балки EI = 1



x1 := 0, 0.5..3	x2 := 3, 3.5..5	x3 := 5, 5.5..6	x4 := 6, 6.5..7	x5 := 7, 7.5..8
x1 = y(x1) =	x2 = y(x2) =	x3 = y(x3) =	x4 = y(x4) =	x5 = y(x5) =
0 0	3 0	5 -7.3	6 -6.05	7 -0.07
0.5 -1.16	3.5 -1.63	5.5 -7.31	6.5 -3.52	7.5 3.96
1 -1.77	4 -4	6 -6.05	7 -0.07	8 8.48
1.5 -1.6	4.5 -6.1			
2 -0.83	5 -7.3			
2.5 5.21·10 ⁻³				
3 0				

Рисунок 4.8 – Табулювання функцій переміщень балки та побудова їх графіків

$$\max |y_i| \leq [f] = \frac{l_i}{200},$$

де l_i – довжина прогону чи консольної частини балки.

На прогоні AB допустима стріла прогину

$$[f]_{AB} = \frac{l_{AB}}{200} = \frac{3}{200} = 0,015\text{ м} = 15\text{ мм}.$$

На прогоні BC – $[f]_{BC} = \frac{l_{BC}}{200} = \frac{4}{200} = 0,02\text{ м} = 20\text{ мм}$, а на консольній

частині балки $[f]_{\kappa} = \frac{l_{\kappa}}{200} = \frac{1}{200} = 0,005\text{ м} = 5\text{ мм}$.

Відповідні максимальні прогини балки:

$$\max |y_{AB}| = \frac{1,8 \cdot 10^3}{EJ_z} = \frac{1,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0016\text{ м} = 1,6\text{ мм} \leq [f]_{AB};$$

$$\max |y_{BC}| = \frac{7,46 \cdot 10^3}{EJ_z} = \frac{7,46 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0065\text{ м} = 6,5\text{ мм} \leq [f]_{BC};$$

$$\max |y_{\kappa}| = \frac{8,48 \cdot 10^3}{EJ_z} = \frac{8,48 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0074\text{ м} = 7,4\text{ мм} > [f]_{\kappa},$$

де $J_z = 572\text{ см}^4$ – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

На консольній частині балки умова жорсткості не виконується. Відкоригуємо розміри поперечного перерізу балки виходячи з умови жорсткості на її консольній частині:

$$\max |y_{\kappa}| = \frac{8,48 \cdot 10^3}{EJ_z} \leq [f]_{\kappa} \Rightarrow J_z \geq \frac{8,48 \cdot 10^3}{E[f]_{\kappa}} = \frac{8,48 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} =$$

$= 0,848 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 = 848\text{ см}^4$. За таблицями сортаменту остаточно вибираємо двотавр №16, для якого табличне значення осьового моменту інерції $J_z^{\text{табл}} = 873\text{ см}^4$. За такого поперечного перерізу балка задовольнятиме і умову міцності і умову жорсткості.

5 ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

5.1 Проектно-перевірний розрахунок на стійкість стиснутого стержня

Задано сталевий стержень завдовжки l , який стискається осьювою силою F . Умови закріплення стержня та його поперечний переріз зображені на рисунках 5.1 та 5.2.

Необхідно:

- визначити коефіцієнт зведення довжини стержня μ , відповідно до умов його закріплення;
- виконати проектний розрахунок стержня на стійкість, тобто визначити розміри поперечного перерізу стержня з умови стійкості (обчислення виконати методом послідовних наближень, у першому наближенні коефіцієнт зменшення допустимого нормального напруження прийняти рівним 0,5);
- здійснити перевірний розрахунок стиснутого стержня на стійкість;
- знайти стискаючу критичну силу $F_{кр}$ для спроектованого стержня;
- обчислити дійсний коефіцієнт запасу стійкості k_{cm} .

Числові дані для розрахунку подані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Числові дані до завдання "Проектно-перевірний розрахунок на стійкість стиснутого стержня"

№ рядка	$l, м$	$F, кН$	$[\sigma], МПа$
1	2,0	500	160
2	2,5	450	155
3	3,0	300	115
4	3,5	350	120
5	4,0	300	125
6	4,5	250	130
7	5,0	200	135
8	5,5	150	140
9	6,0	100	145
10	6,5	50	150

Примітка. Величину коефіцієнта запасу стійкості приймають трохи більшою, ніж величину коефіцієнта запасу міцності, оскільки беруть до уваги додаткові несприятливі обставини: можливе початкове викривлення стержня, ексцентриситет прикладання навантаження тощо. Для сталевих стержнів k_{cm} приймають від 1,8 до 3; для стержнів із чавуну $k_{cm} = 5 \div 5,5$; для дерев'яних стержнів $k_{cm} = 2,8 \div 3,2$.

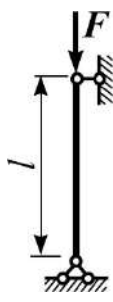
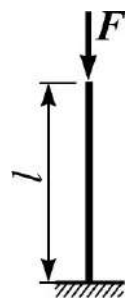
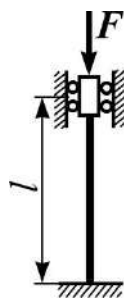


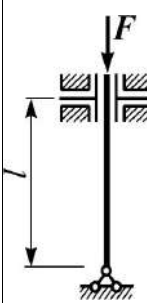
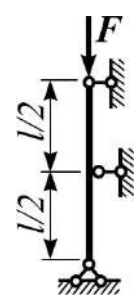
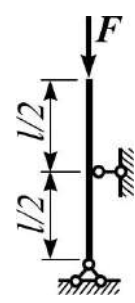
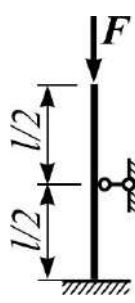
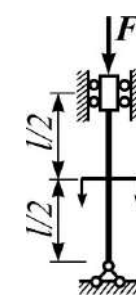
				
$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,7$	$\mu = 1$
Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5
				
$\mu = 2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 1,35$	$\mu = 1,26$	$\mu = 0,526$
Схема 6	Схема 7	Схема 8	Схема 9	Схема 10

Рисунок 5.1 – Схеми закріплення і навантаження центрально-стиснутих стержнів

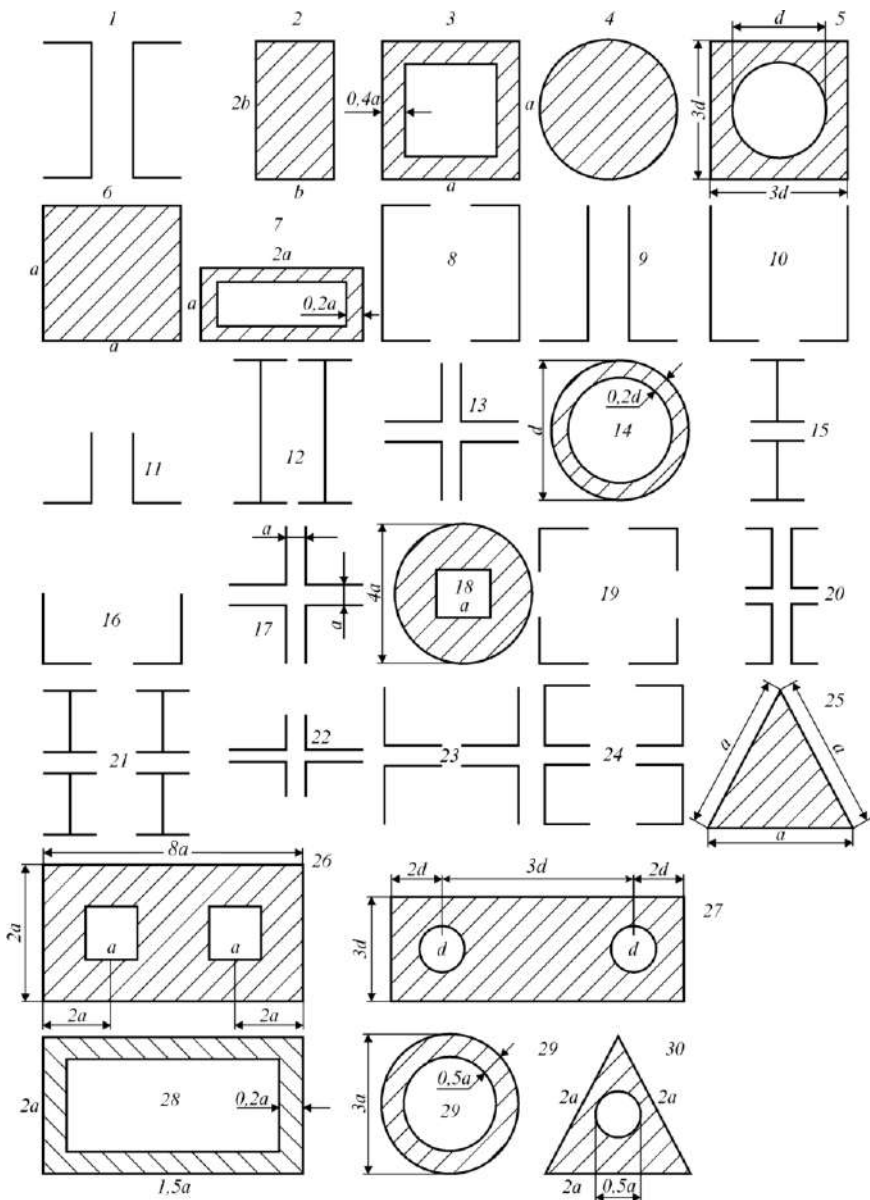


Рисунок 5.2 – Схеми поперечних перерізів центрально-стиснутих стержнів

5.2 Теоретичні нотатки до ЗАДАЧІ 3

Найважливішими завданнями при розрахунку стержня на стійкість є підбір необхідних розмірів поперечного перерізу та визначення величини стискаючої критичної сили. Нижче коротко зупинимось на особливостях виконання цих завдань.

5.2.1 Межі застосування формули Ейлера

У стиснутому стержні критичні напруження $\sigma_{кр}$ виникають під дією критичної сили $P_{кр}$. Якщо матеріал стержня працює в межах пружності і критичну силу визначаємо за формулою Ейлера, то

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{A(\mu l)^2}, \quad (5.1)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня, J_{\min} – мінімальний осевий момент інерції поперечного перерізу стержня.

Ураховавши, що відношення J_{\min} / A є квадратом мінімального радіуса інерції i_{\min} , одержимо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2}. \quad (5.2)$$

Введемо безрозмірну величину λ , що називається гнучкістю стержня і дорівнює відношенню зведеної довжини до мінімального радіуса інерції поперечного перерізу:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (5.3)$$

Бачимо, що гнучкість стержня є його узагальненою геометричною характеристикою. Чим вона вища, тим гірше стержень опирається поздовжньому згину.

Тепер критичне напруження визначатиметься за формулою

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (5.4)$$

Залежність між критичним напруженням та гнучкістю можна подати у вигляді гіперболічної кривої – гіперболи Ейлера (рис. 5.3). Оскільки формула Ейлера виведена за припущення, що критичні напруження не перевищують границі пропорційності, існують певні межі її застосовності, які визначаються нерівністю

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}, \quad (5.5)$$

де $\sigma_{пц}$ – границя пропорційності матеріалу стержня.

З нерівності (5.5) визначимо умову, яку повинна задовольняти гнучкість стержня, щоб формула Ейлера була застосовною:

$$\lambda \geq \pi \sqrt{E/\sigma_{\text{пц}}} . \quad (5.6)$$

Знак рівності в цій умові відповідає граничній гнучкості $\lambda_{\text{сп}}$, при зменшенні якої формула Ейлера стає непридатною. Бачимо, що гранична гнучкість стержня є його фізико-механічною характеристикою і залежить від модуля пружності і границі пропорційності. Наприклад, для стержнів, виготовлених з маловуглецевої сталі Ст3, при модулі пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа і границі пропорційності $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа гранична гнучкість:

$$\lambda_{\text{сп}} = 3,142 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 200} \approx 100, \quad (5.7)$$

тобто для сталі Ст3 формула Ейлера застосовна при $\lambda > 100$. Відповідно для матеріалів з іншими механічними характеристиками граничні гнучкості матимуть інші значення.



Зі зменшенням гнучкості стержня критичне напруження зростає, а якщо гнучкість нижча від граничної, критичне напруження перевищує границю пропорційності. Тоді у практичних розрахунках користуються емпіричними формулами, отриманими в результаті експериментальних досліджень. Зокрема, застосовують формулу запропоновану Ясинським :

Рисунок 5.3 – Залежність критичного напруження від гнучкості

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (5.8)$$

де a , b та c – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня і визначаються експериментально (для пластичних матеріалів $c = 0$).

За формулою Ясинського обчислюють критичні напруження для стержнів середньої гнучкості, що широко використовуються в багатьох сталевих та залізобетонних конструкціях. Для сталевих (Ст3) стержнів середня гнучкість становить $40 \leq \lambda \leq 100$.

Прямо пропорційній залежності між критичним напруженням та гнучкістю для стержнів середньої гнучкості на графіку (рис. 5.3) відповідає похила пряма ділянка – так звана пряма Ясинського, що продовжує гіперболу Ейлера. Стержні малої гнучкості $0 < \lambda < 40$ на стійкість не розраховують, оскільки відповідні критичні напруження для них перевищують

границю текучості, тобто руйнування таких стержнів відбувається внаслідок втрати міцності – на рис. 5.3 це ділянка, паралельна осі абсцис.

5.2.2 Практичні розрахунки стиснутих стержнів на стійкість

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому вводиться поняття допустимого напруження на стійкість $[\sigma_{cm}]$:

$$[\sigma_{cm}] = \sigma_{кр} / k_{cm},$$

де k_{cm} – коефіцієнт запасу стійкості.

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стисканні, не перевищувало допустимого напруження на стійкість:

$$\sigma = \frac{P_{\max}}{A} \leq [\sigma_{cm}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, а й від гнучкості стержня.

Знайдемо залежність між допустимим напруженням на стійкість та допустимим напруженням на міцність при стиску:

$$\frac{[\sigma_{cm}]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} n_n}{k_{cm} \sigma_n} = \varphi, \quad (5.6)$$

де $[\sigma] = \sigma_n / n_n$ – допустиме напруження; n_n – коефіцієнт запасу міцності,

$$\{\sigma_n, n_n\} = \begin{cases} \sigma_T, n_T & \text{— для пластичних матеріалів;} \\ \sigma_M, n_M & \text{— для крихких матеріалів.} \end{cases}$$

Шукана залежність

$$[\sigma_{cm}] = \varphi [\sigma], \quad (5.7)$$

де φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості й подати у вигляді таблиці або графіку залежності φ від λ .

Отже, з урахуванням залежності (5.7) умова стійкості набуває вигляду

$$\sigma = \frac{P_{\max}}{\varphi A} \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

За допомогою умови стійкості (5.8) розв'язують задачі трьох типів.

1. Перевірка стійкості полягає у перевірці виконання умови стійкості (5.8) в такій послідовності:

– визначають мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні в головних площинах):

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A};$$

– обчислюють гнучкість стержня за формулою (5.3);
– за таблицями вибирають коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження φ ;

– добути вихідні дані підставляють в умову стійкості (5.8) для перевірки її виконання.

2. Визначення допустимого навантаження з умови стійкості виконується аналогічно, за винятком останньої дії, замість чого обчислюють допустиме навантаження:

$$[P] = \varphi[\sigma]A. \quad (5.9)$$

3. Добір поперечного перерізу стержня, або проектувальний розрахунок, здійснюється на підставі обчислення площі попереччя стержня з умови стійкості:

$$A \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}. \quad (5.10)$$

Ця задача не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності (5.10) входять дві невідомі величини: площа поперечного перерізу A та коефіцієнт φ , який залежить від не визначених ще розмірів попереччя, його форми та довжини стержня. Тому задачу розв'язують методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів за допомогою умови стійкості в такій послідовності:

– задаються значенням коефіцієнта $\varphi_1 = 0,5$ та обчислюють площу A_1 попереччя стержня:

$$A_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]};$$

– відповідно до обчисленої площі визначають розміри попереччя або вибирають номер профілю із сортаменту;

– визначають радіус інерції та гнучкість стержня, за якою з таблиць знаходять φ_1^* ;

– порівнюють коефіцієнти φ_1 та φ_1^* і, якщо розбіжність невелика, перевіряють умову стійкості (5.24); у разі істотної розбіжності значень φ_1 та φ_1^* виконують друге наближення, для якого оптимальним значенням

коефіцієнта зниження основного допустимого напруження φ_2 буде середньоарифметичне

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}.$$

Після цього повторюють усі зазначені дії.

Щоб отримати задовільний розв'язок, зазвичай доводиться виконати кілька наближень.

5.3 Приклади проектно-перевірочного розрахунку на стійкість стиснутих стержнів

Приклад 1

Підібрати за сортаментом прокатної сталі стержень завдовжки $l = 5.2\text{ м}$, який складається з двох нерівнобоких кутників і стискається осьюовою силою $F = 470\text{ кН}$ (рис. 5.4). Матеріал, з якого виготовлені кутники – сталь з допустимим напруженням на стиск $[\sigma] = 160\text{ МПа}$. Схема закріплення стержня показана на рис. 5.4. Розмір δ прийняти рівним товщині полочки d .

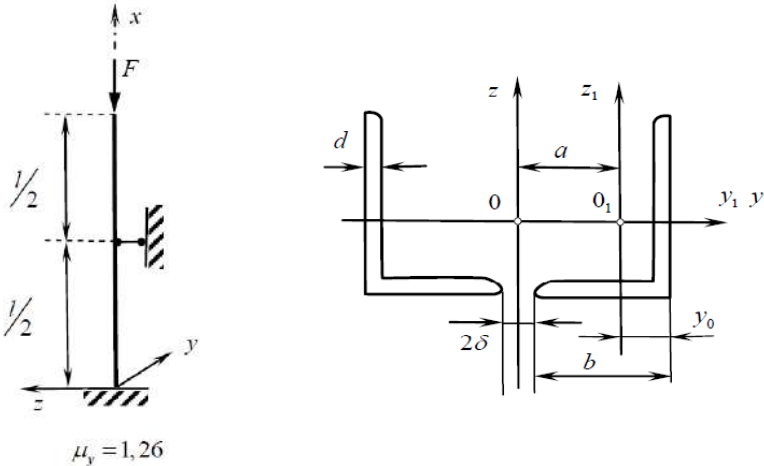


Рисунок 5.4 – Схема стиснутого стержня

Встановлюємо коефіцієнт зведення довжини для заданого стержня. Стержень з одного боку (нижній торець) жорстко закріплений, а з іншого боку (верхній торець) вільний від закріплень. Посередині стержня встановлено шарнірну рухому опору. Користуючись довідковими джерелами [3, 15] визначаємо, що для такого способу закріплення стержня $\mu_y = \mu_z = 1,26$.

Умова стійкості стиснутого стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

звідси, необхідна площа поперечного перерізу стержня

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}.$$

Необхідні розміри поперечного перерізу одного кутника підбираємо методом послідовних наближень.

І наближення. Приймаючи $\varphi_1 = 0.5$, отримуємо:

$$A_1 \geq \frac{F}{n\varphi_1[\sigma]} = \frac{470\text{кН}}{2 \cdot 0.5 \cdot 16\text{кН/см}^2} = 29.4\text{см}^2.$$

Тут $n = 2$ – кількість кутників.

З таблиці сортаменту (ГОСТ 8510 - 72) підбираємо кутник

$160 \times 100 \times 10$, для якого $A = 30.0\text{см}^2$, $i_{z_1} = 2.82\text{см}$, $i_{y_1} = 5.11\text{см}$,

$y_0 = 2.36\text{см}$, $b = 100\text{мм} = 10\text{см}$, $d = 10\text{мм} = 1\text{см}$.

Визначимо головні радіуси інерції перерізу стержня:

$$i_y = \sqrt{\frac{2I_{y_1}}{2A_1}} = i_{y_1} = 5.11\text{см},$$

$$i_z = \sqrt{\frac{2(I_{z_1} + a^2 A_1)}{2A_1}} = \sqrt{i_{z_1}^2 + a^2},$$

де a – відстань між осями z і z_1 (рис. 5.4).

Із рисунка 5.4 бачимо, що

$$a = \delta + b - y_0 = 10 + 1 - 2.36 = 8.64\text{см}.$$

Тоді

$$i_z = \sqrt{2.82^2 + 8.64^2} = 9.088\text{см}.$$

Гнучкість стержня відповідно становитиме:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{1.26 \cdot 520}{5.11} = 128.2,$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{1.26 \cdot 520}{9.088} = 72.09.$$

Оскільки $\lambda_y > \lambda_z$ то підбір перерізу будемо здійснювати за більшою гнучкістю λ_y .

З таблиці коефіцієнтів φ для сталі Ст. 3 виписуємо найближчі до обчисленого $\lambda_y = 128.2$ значення λ і відповідні їм значення φ :

для $\lambda_i = 120$ $\varphi_i = 0.45$, для $\lambda_{i+1} = 130$ $\varphi_{i+1} = 0.40$.

Методом лінійної інтерполяції для $\lambda_y = 128.2$ знаходимо

$$\varphi_1^* = \varphi_i - \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{10} \cdot (\lambda_y - \lambda_i),$$

отримане значення φ_1^* повинно приблизно (з точністю до двох знаків після коми) дорівнювати φ_1 , якщо така умова не виконується, то проводимо наступне наближення.

$$\varphi_1^* = 0.45 - \frac{0.45 - 0.4}{10} \cdot 8.2 = 0.409 \ll 0.5.$$

II наближення. Приймемо наступне значення коефіцієнту φ_2 як середнє арифметичне початкового і кінцевого значень коефіцієнтів першого наближення:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^* + \varphi_1}{2} = \frac{0.5 + 0.409}{2} = 0.4545.$$

Обчислюємо необхідну площу одного кутника у другому наближенні:

$$A_2 = \frac{470 \kappa H}{2 \cdot 0.4545 \cdot 16 \kappa H / \text{см}^2} = 32.31 \text{см}^2.$$

За таблицями сортаменту вибираємо кутник $180 \times 110 \times 10$, для якого $A_2^* = 33.69 \text{см}^2$, $i_{z1} = 3.10 \text{см}$, $i_{y1} = 5.77 \text{см}$, $y_0 = 2.52 \text{см}$, $d = 12 \text{мм} = 1.2 \text{см}$.

Максимальна гнучкість стержня у другому наближенні:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{1.26 \cdot 520}{5.77} = 113.5,$$

$$\varphi_2^* = 0.52 - \frac{0.52 - 0.45}{10} \cdot 3.5 = 0.4955 \neq 0.4545.$$

Різниця:

$$|\varphi_2 - \varphi_2^*| = |0.4545 - 0.4955| = 0.041 > 0.01.$$

III наближення. Прийmemo наступне значення коефіцієнту φ_3 як середнє арифметичне початкового і кінцевого значень коефіцієнтів другого наближення:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2^* + \varphi_2}{2} = \frac{0.4955 + 0.4545}{2} = 0.475.$$

Обчислюємо необхідну площу одного кутника:

$$A_3 \geq \frac{470 \text{кН}}{2 \cdot 0.475 \cdot 16 \text{кН/см}^2} = 30.92 \text{см}^2.$$

Як бачимо, тут також нас влаштовує кутник $180 \times 110 \times 10$.

Отже $\lambda_y = 113.5$, $\varphi_3^* = 0.4955 \neq 0.475$.

Різниця:

$$|\varphi_3 - \varphi_3^*| = |0.475 - 0.4955| = 0.0205 > 0.01.$$

Провівши IV наближення, прийдемо до того самого результату, виберемо кутник $180 \times 110 \times 10$, при цьому $\varphi_4^* = 0.4955 \approx \varphi_4 = 0.4853$. Як бачимо значення коефіцієнтів φ досить близькі між собою. Різниця складає:

$$|\varphi_4 - \varphi_4^*| = |0.4853 - 0.4955| = 0.0102 \approx 0.01.$$

Обчислення припиняємо.

Розміри поперечного перерізу стержня, прийняті в четвертому наближенні є близькі до оптимальних.

Виконуємо перевірний розрахунок за напруженнями:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_4^* n A_4} = \frac{470}{0.4853 \cdot 2 \cdot 33.69} = 14.37 \text{кН/см}^2 < [\sigma].$$

Умова стійкості спроектованого стержня виконується.

Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості стержня з вибраними розмірами поперечного перерізу.

Оскільки стержень сталевий (Ст3) то граничну гнучкість знайдемо із виразу 5.6:

$$\lambda_{sp} = 3,142 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 200} \approx 100.$$

У нашому випадку $\lambda_{\max} = \lambda_y = 113.5 > \lambda_{zp} = 100$, тобто обчислення критичного напруження виконуємо за теорією Ейлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3.14^2 \cdot 2 \cdot 10^4}{113.5^2} = 15,3 \text{кН} / \text{см}^2.$$

Стискаюча критична сила для спроектованого стержня

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot n \cdot A_4^* = 15.3 \cdot 2 \cdot 33.69 = 1030,9 \text{кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості стержня становить:

$$k_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1030,9}{470} = 2,19.$$

Остаточні результати проектно-перевірною розрахунку на стійкість стиснутого стержня подано в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2. Результати проектно-перевірною розрахунку на стійкість стиснутого стержня

Коефіцієнт зведення довжини	Розміри поперечного перерізу	Критична сила	Коефіцієнт запасу стійкості
$\mu = 1.26$	кутник $180 \times 110 \times 10$, $y_0 = 2.52 \text{см}$, $d = 1,2 \text{см}$, $A = 33.69 \text{см}^2$	$F_{кр} = 1030.9 \text{кН}$	$k_{ст} = 2.19$

Приклад 2

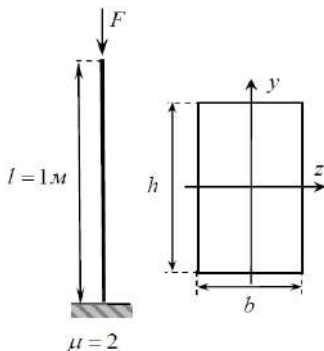


Рисунок 5.5 – Схема стиснутого стержня

Для стержня, який зображено на рис. 5.5, підберіть розміри прямокутного поперечного перерізу (з відношенням сторін $h/b=2$). Стержень завдовжки $l = 1 \text{м}$ стискається силою $F = 20 \text{кН}$. Матеріал – деревина:

$$[\sigma] = 1 \text{кН} / \text{см}^2, E = 0.1 \cdot 10^{11} \text{Па}.$$

Розміри поперечного перерізу визначатимемо з умови стійкості методом послідовних наближень.

І наближення. Прийmemo початкове значення коефіцієнта зменшення допустимого напруження $\varphi_1 = 0.5$.

З умови стійкості визначаємо величину площі у першому наближенні:

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{20\kappa H}{0.5 \cdot 1\kappa H / \text{см}^2} = 40\text{см}^2.$$

Визначаємо розміри поперечного перерізу стержня b_1, h_1 в першому наближенні: $A_1 = b_1 \cdot h_1 \geq 40\text{см}^2$, де $h/b = 2$, або $h = 2b$. Тобто

$$2b_1^2 \geq 40\text{см}^2. \text{ Звідси } b_1 \geq 4.47\text{см}, h_1 = 2b_1 \geq 8.94\text{см}.$$

Визначаємо головні радіуси інерції поперечного перерізу:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{8.94^2}{12}} = 2.58\text{см},$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{4.47^2}{12}} = 1.29\text{см}.$$

Оскільки $i_y < i_z$, то очевидно $\lambda_y > \lambda_z$, тобто стержень швидше втрачає стійкість відносно осі у. Всі подальші розрахунки достатньо провести відносно цієї осі.

Знаходимо максимальну гнучкість:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 100\text{см}}{1.29\text{см}} = 154,96.$$

З таблиці коефіцієнтів φ для деревини (сосна) виписуємо найближчі значення λ і φ :

$$\text{для } \lambda_i = 150 \quad \varphi_i = 0.14, \text{ для } \lambda_{i+1} = 160 \quad \varphi_{i+1} = 0.12,$$

Методом лінійної інтерполяції для $\lambda_y = 154.96$ знаходимо:

$$\varphi_1^* = \varphi_i - \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{10} \cdot (\lambda_y - \lambda_i),$$

Отримане значення φ_1^* повинно приблизно (з точністю до двох знаків після коми) дорівнювати $\varphi_1^* \approx \varphi_1$, якщо умова не виконується то проведемо наступне наближення.

$$\varphi_1^* = 0.14 - \frac{0.14 - 0.12}{10} \cdot 4.96 = 0.13 \ll 0.5.$$

Оскільки різниця велика (більше 0.01), то переходимо до II наближення.

II наближення. У другому наближенні приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^* + \varphi_1}{2} = \frac{0.13 + 0.5}{2} = 0.315,$$

подальша послідовність дій аналогічна попередньому наближенню.

$$\text{Знаходимо } A_2 \geq \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{20 \text{кН}}{0.315 \cdot 1 \text{кН/см}^2} = 63.49 \text{см}^2.$$

$$\text{Отже, } 2b_2^2 \geq 63.49 \text{см}^2.$$

$$\text{Тоді } b_2 \geq 5.63 \text{см}, h_2 = 2b_2 \geq 11.26 \text{см}.$$

$$\text{Радіус інерції } i_y = \sqrt{\frac{5.63^2}{12}} = 1.62 \text{см}.$$

$$\text{Гнучкість } \lambda_y = \frac{2 \cdot 100 \text{см}}{1.62 \text{см}} = 123.45.$$

За табличними значеннями, методом інтерполяції визначаємо $\varphi_2^* = 0.2062$. Різниця:

$$\left| \varphi_2 - \varphi_2^* \right| = \left| 0.315 - 0.2062 \right| = 0.1088 > 0.01.$$

Виконуємо наступне наближення.

$$\text{III Наближення. } \varphi_3 = \frac{\varphi_2^* + \varphi_2}{2} = \frac{0.2062 + 0.315}{2} = 0.2606.$$

Площа поперечного перерізу у третьому наближенні

$A_3 \geq \frac{F}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{20кН}{0.2606 \cdot 1кН/см^2} = 76.74см^2$, а розміри перерізу
 $b_3 \geq 6.19см$, $h_3 = 12.38см$. Радіус інерції і гнучкість у третьому на-
ближенні:

$$i_y = \sqrt{\frac{6.19^2}{12}} = 1.78см,$$

$$\lambda_y = \frac{2 \cdot 100см}{1.78см} = 112.35.$$

Тоді коефіцієнт зменшення допустимого нормального напруження
 $\varphi_3^* = 0.2429$.

Різниця $|\varphi_3 - \varphi_3^*| = |0.2606 - 0.2429| = 0.0177 > 0.01$.

IV Наближення. $\varphi_4 = \frac{\varphi_2^* + \varphi_2}{2} = \frac{0.2606 + 0.2429}{2} = 0.2517$.

Площа поперечного перерізу у четвертому наближенні:

$$A_4 \geq \frac{F}{\varphi_4[\sigma]} = \frac{20кН}{0.2517 \cdot 1кН/см^2} = 79.45см^2.$$

Розміри прямокутного попереччя у четвертому наближенні:

$$b_4 \geq 6.3см, h_4 = 12.6см.$$

Відповідно до обчислених розмірів стержня:

$$i_y = \sqrt{\frac{6.3^2}{12}} = 1.81см, \lambda_y = \frac{2 \cdot 100см}{1.81см} = 110.49, \varphi_4^* = 0.2485.$$

Різниця $|\varphi_4 - \varphi_4^*| = |0.2517 - 0.2485| = 0.0032 < 0.01$.

Обчислення припиняємо. Перевіряємо виконання умови стійкості спроектованого стержня

$$\frac{F}{\varphi_4^* A_4} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{20}{0.2485 \cdot 79.45} \leq 3; 1.013кН/см^2 < 3кН/см^2.$$

Умова стійкості виконується.

Отже, необхідні мінімальні розміри поперечного перерізу стержня:
 $h_4 = 12.6см$, $b_4 = 6.3см$.

Критичну силу знайдемо з виразу:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A_4,$$

Оскільки $\lambda_y = 110.49 > 110$ ($\lambda_{гран} = 110$ – граничне значення гнучкості для деревини (сосна)), то критичне напруження $\sigma_{кр}$ визначаємо за формулою Ейлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

де E – модуль пружності деревини,

$$\sigma_{кр} = \frac{3.14^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{11}}{110.49^2} = 8.07 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$F_{кр} = 8.07 \cdot 10^6 \cdot 79.45 \cdot 10^{-4} = 64.16 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості спроектованого стержня:

$$k_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{64.16}{20} = 3.2.$$

Остаточні результати проектно-перевірального розрахунку на стійкість стиснутого стержня подано в таблиці 5.3.

Таблиця 5.3. Результати розрахунку

Коефіцієнт зведення довжини	Розміри поперечного перерізу	Критична сила	Коефіцієнт запасу стійкості
$\mu = 2$	$h = 12.6 \text{ см},$ $b = 6.3 \text{ см},$ $A = 79.45 \text{ см}^2$	$F_{кр} = 64.16 \text{ кН}$	$k_{ст} = 3,2$

Список рекомендованої літератури

- 1 Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. К.: Вища шк., 2004. 655с.
- 2 Посацький С.Л. Опір матеріалів. Львів, 1983. 403 с.
- 3 Корнілов О.А. Опір матеріалів. К.: ЛОГОС, 2000.
- 4 Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: Ч. I, кн.1 і 2. Опір бруса / В.Г.Піскунов, Ю.М.Федоренко, В.Д. Шевченко та ін. К.: Вища шк. 1994.
- 5 Gere J. M. Mechanics of materials / J. Gere, B. Goodno. – Stamford: Cengage Learning, 2012. 620 p.
- 6 Опір матеріалів. Збірник тестових завдань. Т. 2: Складний опір. Динаміка, міцність та стійкість пружних тіл / А.С. Величкович, І.Й. Попадюк, І.П. Шацький та ін. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2013. 315 с.
- 7 Величкович А.С. Опір матеріалів. Конспект лекцій. Івано-Франківськ: Факел, 2005. 178с.
- 8 Опір матеріалів: Методичні вказівки для самостійного вивчення дисципліни / Ю.М. Никифорчин, А.С. Величкович, О.М. Лев та ін. Івано-Франківськ: Факел, 2006. 77 с.
- 9 Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. Опір матеріалів. Розрахункові роботи. Львів: Афіша, 2002 . 278.
- 10 Шопа В.М., Бездір О.О., Величкович А.С., Даляк Т.М. Опір матеріалів. Кручення стержнів: Конспект лекцій для студентів напряму підготовки 0902 – Інженерна механіка. Івано-Франківськ: Факел, 2007. 44с.

1. Визначення переміщень в пружних системах за методом Мора
2. Визначення переміщень в пружних системах за методом Верещагіна
3. Розрахунок стиснутих стержнів на стійкість
4. Наближений розрахунок на удар
5. Епюри поперечних зусиль і згинаючих моментів
6. Диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечним зусиллям і згинаючим моментом
7. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

ДОДАТОК 2.

ЗВО “Університет Короля Данила”
Факультет суспільних та прикладних наук
Кафедра архітектури та будівництва

КУРСОВА РОБОТА

З _____
(назва дисципліни)

На тему: _____

Студента (ки) _____ курсу _____ групи
галузь знань:

19 «Архітектура та будівництво»

Спеціальність: 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

(прізвище та ініціали)

Керівник _____

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Члени комісії

_____	_____
(підпис)	(прізвище та ініціали)
_____	_____
(підпис)	(прізвище та ініціали)
_____	_____
(підпис)	(прізвище та ініціали)

м. Івано-Франківськ - 20 __рік